Erfassung: BookAccess, 4040 Linz

Dieses Buch wurde erfasst von: Janis Marian Ahrer

Erfassungsdatum: Juli/2018

---

t.

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik

Erklärungen

Aufgaben

Lösungen

Formeln

inkl. digitalem Zusatzpaket

TINHOF

FISCHER

GERSTENDORF

GIRLINGER

PAUL

FIT für die standardisierte Reife- und Diplomprüfung

IV HAK

---

# !!Zeichenerklärungen

? ... Zum Nachdenken, Übungsaufgabe

T ... Für Wissenswertes, Tipps

! ... Für besonders wichtige Hinweise

D ... Für Diskussionsaufgaben

V ... Für Verknüpfungen zu einem anderen Gegenstand oder einem anderen Kapitel

Z ... Für Downloads aus dem digitalen Zusatzpaket

A ... Modellieren und Transferieren

B ... Operieren und Technologieeinsatz

C ... Interpretieren und Dokumentieren

D ... Argumentieren und Kommunizieren

---

!! ... Eine Überschrift der Ebene 1-4 ist mit zwei Rufzeichen am Anfang der Zeile angekündigt.

+++ ... Drei Pluszeichen kennzeichnet die Nummerierung eines Beispiels.

{{ ... }} ... Dieser Text kommt in der Vorlage so nicht vor. Er ersetzt oder ergänzt den Originaltext.

||...|| ... Im Originaltext besonders gekennzeichnete längere Textstellen stehen unter doppelten senkrechten Strichen und sind durch drei Bindestriche vom nächsten Absatz getrennt. Der Text soll dort eingefügt werden, wo er am sinnvollsten ist.

|...| ... Im Originaltext besonders gekennzeichnete einzelne Wörter oder Teile eines Wortes stehen zwischen einfachen senkrechte Strichen.

[] ... In eckige fett formatierte Klammern soll etwas eingesetzt werden.

[[ ... ]] ... Unter doppelten eckigen fett formatierten Klammern steht eine Lösung als Beispiel.

### ... Drei Rautezeichen kennzeichnen einen Eintrag, der schon zur Lösung eines Beispiels verwendet worden ist.

' ... Das Apostroph weist auf elementare mathematische Funktionen und mathematische Konstanten hin. Es muss zum richtigen Lesen/Schreiben jede Art der Automatikkorrektur ausgeschaltet sein.

ZI ... Zusatzinformationen (auch Fußnoten - diese stehen am Anfang des Abschnitts, auf den sie sich beziehen)

---

##### Zeichenerklärung

{{ZI: Dies ist die (mathematische) Zeichenerklärung des Buches.}}

Zeichen: \

Sprechweise: nicht

Erläuterung, Beispiele: \P; Negation der Aussage P

---

Zeichen: -->

Sprechweise: impliziert; aus ... folgt ...

Erläuterung, Beispiele: P --> Q; P impliziert Q; aus P folgt Q

---

Zeichen: <-->

Sprechweise: äquivalent; genau dann

Erläuterung, Beispiele: P <--> Q; P äquivalent Q; P genau dann, wenn Q

---

Zeichen: 'u

Sprechweise: und

Erläuterung, Beispiele: P 'u Q; sowohl P als auch Q

---

Zeichen: 'o

Sprechweise: oder

Erläuterung, Beispiele: P 'o= Q; entweder P oder Q oder beides

---

Zeichen: {...}

Sprechweise: Menge mit den Elementen

Erläuterung, Beispiele: A ={a, b, c}

---

Zeichen: 'el

Sprechweise: ist Element aus (von)

Erläuterung, Beispiele: a 'el A

---

Zeichen: \'el

Sprechweise: ist nicht Element aus (von)

Erläuterung, Beispiele: d \'el A

---

Zeichen: {x 'el M | P(x)}

Sprechweise: Menge aller Elemente x aus M für die gilt: P von x ist wahr

Erläuterung, Beispiele: {x 'el M | x <3}

---

Zeichen: {}

Sprechweise: leere Menge

Erläuterung, Beispiele: enthält kein Element

---

Zeichen: =

Sprechweise: ist gleich

Erläuterung, Beispiele: bei Mengen: A =B; bei Zahlen: 2 =4/2

---

Zeichen: \=

Sprechweise: ist nicht gleich, ungleich

Erläuterung, Beispiele: bei Mengen: A \=C; bei Zahlen 3 \=5

---

Zeichen: 'TM

Sprechweise: ist Teilmenge

Erläuterung, Beispiele: A 'TM B; A ist Teilmenge von B

---

Zeichen: 'DM

Sprechweise: Durchschnitt(smenge)

Erläuterung, Beispiele: A 'DM B; Durchschnitt(smenge) von A und B

---

Zeichen: 'VM

Sprechweise: Vereinigung(smenge)

Erläuterung, Beispiele: A 'VM B; Vereinigung(smenge) von A und B

---

Zeichen: 11\

Sprechweise: ohne

Erläuterung, Beispiele: A 11\ B; Differenzmenge A ohne B

---

Zeichen: G 11\ A

Sprechweise: Komplementärmenge zu A

Erläuterung, Beispiele: G 11\ A; Komplementärmenge zu A in Bezug auf G

---

Zeichen: 'x

Sprechweise: kreuz

Erläuterung, Beispiele: A 'x B; Produktmenge von A und B

---

Zeichen: (a|b); (a, b)

Sprechweise: geordnetes Paar a, b

Erläuterung, Beispiele: (3|-2)

---

Zeichen: >

Sprechweise: ist größer

Erläuterung, Beispiele: a >b

---

Zeichen: <

Sprechweise: ist kleiner

Erläuterung, Beispiele: a <b

---

Zeichen: >=

Sprechweise: ist größer oder gleich

Erläuterung, Beispiele: a >=b

---

Zeichen: <=

Sprechweise: ist kleiner oder gleich

Erläuterung, Beispiele: a <=b

---

Zeichen: 'N

Sprechweise: Menge der natürlichen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'N ={0, 1, 2, 3, ...}

---

Zeichen: 'Z

Sprechweise: Menge der ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z ={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

---

Zeichen: 'Z^+

Sprechweise: Menge der positiven ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z ={1, 2, 3, ...}

---

Zeichen: 'Z^-

Sprechweise: Menge der negativen ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z^- ={..., -3, -2, -1}

---

Zeichen: 'Z^+\_0

Sprechweise: Menge der positiven ganzen Zahlen einschließlich 0

Erläuterung, Beispiele: 'Z^+\_0 ={0, 1, 2, 3, ...}

---

Zeichen: 'Q

Sprechweise: Menge der rationalen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Q^+, 'Q^-, 'Q^+\_0 wie bei 'Z

---

Zeichen: 'I

Sprechweise: Menge der irrationalen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: unendlich nichtperiodische Dezimalzahlen

---

Zeichen: 'R

Sprechweise: Menge der reellen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'R^+, 'R^-, 'R^+\_0 wie bei 'Z

---

Zeichen: |...|

Sprechweise: (Absolut-)Betrag von, absolut

Erläuterung, Beispiele: |a|; absolut a

---

Zeichen: 'Si

Sprechweise: Summe

Erläuterung, Beispiele: 'Si[i =1; n](a\_i) =a\_1 +a\_2 +... +a\_n

---

Zeichen: G, D, L

Sprechweise: Grund-, Definitions- und Lösungsmenge

Erläuterung, Beispiele: L ={-2, 3}

---

Zeichen: [a; b]

Sprechweise: abgeschlossenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: [a; b] ={x 'el 'R a <=x <=b}

---

Zeichen: ]a; b]; [a; b[

Sprechweise: halboffenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: ]a; b] ={x 'el 'R a <x <=b}

---

Zeichen: ]a; b[

Sprechweise: offenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: [a; b] ={x 'el 'R a <x <b}

---

Zeichen: 'w()

Sprechweise: (Quadrat-)Wurzel aus

Erläuterung, Beispiele: 'w(a); (Quadrat-)Wurzel aus a

---

##### Funktionen

f: D -> W

D ... Definitionsmenge, W ... Wertemenge

---

x -> y =f(x)

x zugeordnet y, y ist Funktion von x

---

f ={(x|y) | y =f(x)}

Funktion in Mengenschreibweise

---

f^(-1): x -> y =f^(-1)(x)

Umkehrfunkton zu f: x -> y =f(x) <--> x =f^(-1)(y)

---

##### Geometrische Zeichen

||

parallel

---

==

kongruent

---

~

ähnlich

---

'wi()

Winkel

---

're

rechter Winkel

---

(AB)^-

Länge der Strecke AB

---

'sin(x)

Sinus von x

---

'cos(x)

Kosinus von x

---

'tan(x)

Tangens von x

---

##### Weitere Zeichen

'log\_a(x)

Logarithmus von x zur Basis a

---

'lg(x) ='log\_(10)(x)

Logarithmus von x zur Basis 10

---

'ln(x) ='log\_('e)(x)

Logarithmus von x zur Basis 'e

---

'lb(x) ='log\_2(x)

Logarithmus von x zur Basis 3

---

'e

eulersche Zahl, e =2,718281828

---

'pi

Kreiszahl Pi, 'pi =2,141592653

---

##### Folgende Piktogramme haben wir für die verschiedenen Bereiche gewählt:

? ... Zum Nachdenken, Übungsaufgabe

T ... Für Wissenswertes, Tipps

! ... Für besonders wichtige Hinweise

D ... Für Diskussionsaufgaben

V ... Für Verknüpfungen zu einem anderen Gegenstand oder einem anderen Kapitel

j-1

t.

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Bildung, die begeistert!

Mathematik

-) Erklärungen

-) Aufgaben

-) Lösungen

-) Formeln

inkl. digitalem Zusatzpaket

FRIEDRICH TINHOF

WOLFGANG FISCHER

KATHRIN GERSTENDORF

HELMUT GIERLINGER

MARKUS PAUL

Unter Mitarbeit von THERESIA KLONNER

IV HAK

j-2

Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch aus diesem Buch verboten ist - § 42 Absatz 6 Urheberrechtsgesetz (Stand: 1. 8. 2015)

"Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- und Unterrichtsgebrauch bestimmt sind."

PEFC

PEFC/06-39-364/05

##### Impressum

Tinhof u. a., Mathematik IV HAK

inkl. digitalem Zusatzpaket

1. überarbeitete Auflage 2017, Nachdruck 2018

Schulbuch-Nr. 180.703

Schulbuch-Nr. Kombi E-Book 180.880

TRAUNER Verlag, Linz

##### Das Autorenteam

OStR. Mag. Friedrich Tinhof,

Bundeshandelsakademie Eisenstadt, Bundes-ARGE-Leiter Mathematik HAK, ARGE-Leiter Mathematik Burgenland, Vortragender an der PH Burgenland

Mag. Dipl.-Ing. Wolfgang Fischer,

Bundeshandelsakademie Rohrbach, Multiplikator im Bereich standardisierte Reife- und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS

Mag. Kathrin Gerstendorf,

Bundeshandelsakademie Landeck, Item-Writerin für die Kompensationsprüfung zur standardisierten kompetenzorientierten Reife- und Diplomprüfung, Verfasserin von Übungsaufgaben für die Handelsakademie am BMBWF, Multiplikatorin im Bereich standardisierte Reife und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS, ARGE-Leiter-Stv. Mathematik Tirol

OStR. Mag. Helmut Girlinger,

Lehrer i. R. an der Bundeshandelsakademie Rohrbach, Trainer, Prüfer und Mehrfach-Vorsitzender bei Berufsreifeprüfungen, Testadministrator für das BMBWF

Mag. Dr. Markus Paul,

Bundeshandelsakademie Innsbruck, Item-Writer für die standardisierte, kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung, Lektor am FH-Studiengang Tourismus- und Freizeitwirtschaft am Management-Center Innsbruck, ARGE-Leiter Mathematik Tirol

##### Approbiert für den Unterrichtsgebrauch

- an Handelsakademien für den IV. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik,

Bundesministerium für Bildung, GZ 5.048/0036-IT/3/2016 vom 22. September 2016.

Die Inhalte entsprechen dem vorgeschriebenen Kompetenzraster laut Bildungsstandards und sind laut Lehrplan zu vermitteln. Eine Auswahl bzw. Gewichtung ist nur innerhalb einzelner Kapitel (Beispiele bzw. Vertiefungsangebote) gewährleistet, nicht jedoch dürfen lt. Ministerium einzelne Kapitel oder Kompetenzbereiche ausgelassen werden.

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie bekommen dieses Schulbuch von der Republik Österreich für Ihre Ausbildung.

Bücher helfen nicht nur beim Lernen, sondern sind auch Freunde fürs Leben.

---

© 2017

TRAUNER Verlag + Buchservice GmbH,

Köglstraße 14, A 4020 Linz

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck und sonstige Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Lektorat/Produktmanagement:

MMag. Wolfgang Jungwirth Titelgestaltung: Bettina Victor

Gestaltung und Grafik: Peter Mittermayr

© Bildrecht GmbH/Wien

Gesamtherstellung:

TRAUNER Druck GmbH & Co KG

ISBN 978-3-99033-845-2

Schulbuch-Nr. 180.703

ISBN 978-3-99033-976-3

Schulbuch-Nr. Kombi E-Book 180.880

www.trauner.at

j-3

##### Vorwort

Der vorliegende vierte Band wurde vom Autorenteam auf Basis des aktuellen Lehrplans 2014 der Handelsakademie unter Einbeziehung des aktuellen Kompetenzkataloges überarbeitet.

Wie in den Vorgängerbänden dieser Buchreihe sind alle Kapitel in ähnlicher Weise aufgebaut:

-) Kurzer historischer Überblick zum besprochenen Stoffinhalt

-) Angabe der zu erreichenden Lernziele

-) Einführendes Beispiel, um Interesse zu wecken und einen Ein- und Ausblick zu geben

-) Der "Stoffteil" beinhaltet theoretische Grundlagen sowie vollständig durchgerechnete Beispiele samt Handlungsanweisungen. Es wird dabei darauf geachtet, alle Ausprägungen der Handlungsdimension der Standardmatrix abzudecken. Auch auf die verschiedenen Lerntypen der Schülerinnen und Schüler wird geachtet.

-) Der Aufgabenteil beinhaltet eine Vielzahl von überarbeiteten und neuen Aufgaben, die eine optimale Vorbereitung auf die bevorstehende sRDP ermöglichen.

-) Am Ende eines Kapitels finden sich zusätzliche Aufgaben unter dem Titel "Ziele erreicht?", die eine kompakte Überprüfung der erreichten Kompetenzen erlauben.

-) Zu allen Aufgaben finden sich die Ergebnisse am Ende des Buches. Zu vielen der Aufgaben gibt es auch die vollständig durchgerechneten Lösungen.

Das Autorenteam Linz, im März 2017

---

Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte.

G. H. Hardy, 1877 bis 1947, britischer Mathematiker

"Problem" Materielle Welt -> Modellbildung/Abstraktion -> Lösung Mathematik

Lösung Mathematik -> Interpretation/Konkretisierung -> "Problem" Materielle Welt

Sämtliche vollständig durchgerechnete Beispiele und Übungsaufgaben werden entsprechend der betroffenen Kompetenzbereiche gekennzeichnet:

A ... Modellieren und Transferieren

B ... Operieren und Technologieeinsatz

C ... Interpretieren und Dokumentieren

D ... Argumentieren und Kommunizieren

---

Die perfekte Ergänzung

Unsere Formelsammlung ist zugelassen für die standardisierte Reife- und Diplomprüfung.

Formelsammlung

Mathematik

92 Seiten, 17 x 24 cm

SBNr. 175.746

EUR 7,27

j-4

Inhaltsverzeichnis

j-5

##### Standardmatrix des Kompetenzmodells

##### Handlungsdimension

Inhaltsdimension

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind 1 Zahlen und Maße

A Modellieren und Transferieren für eine Problemstellung mit Zahlen und Maßen ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

B Operieren und Technologieeinsatz mit Zahlen und Maßen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

C Interpretieren und Dokumentieren Zahlen und Maße in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

D Argumentieren und Kommunizieren mithilfe von Zahlen und Maßen argumentieren und kommunizieren.

---

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind 2 Algebra und Geometrie

A Modellieren und Transferieren für eine Problemstellung mithilfe der Algebra und Geometrie ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

B Operieren und Technologieeinsatz mit algebraischen und geometrischen Objekten operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

C Interpretieren und Dokumentieren algebraische und geometrische Objekte in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

D Argumentieren und Kommunizieren in der Fachsprache der Algebra und Geometrie argumentieren und kommunizieren.

---

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind 3 Funktionale Zusammenhänge

A Modellieren und Transferieren ein geeignetes Modell für einen funktionalen Zusammenhang finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

B Operieren und Technologieeinsatz mit funktionalen Zusammenhängen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

C Interpretieren und Dokumentieren funktionale Zusammenhänge interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

D Argumentieren und Kommunizieren funktionale Zusammenhänge argumentieren und kommunizieren.

---

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind 4 Analysis

A Modellieren und Transferieren für eine Problemstellung mithilfe der Analysis ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

B Operieren und Technologieeinsatz Operationen in der Analysis durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

C Interpretieren und Dokumentieren Zusammenhänge in der Analysis interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

D Argumentieren und Kommunizieren in der Fachsprache der Analysis argumentieren und kommunizieren.

---

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind 5 Stochastik

A Modellieren und Transferieren für eine Problemstellung mithilfe der Stochastik ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

B Operieren und Technologieeinsatz Operationen in der Stochastik durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

C Interpretieren und Dokumentieren Zusammenhänge in der Stochastik interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

D Argumentieren und Kommunizieren in der Fachsprache der Stochastik argumentieren und kommunizieren.

---

Alle vollständig durchgerechneten Beispiele und Übungsaufgaben dieses Lehrbuches werden entsprechend der betroffenen Kompetenzbereiche gekennzeichnet:

A ... Modellieren und Transferieren

C ... Interpretieren und Dokumentieren

B ... Operieren und Technologieeinsatz

D ... Argumentieren und Kommunizieren

j-6

##### Digitales Zusatzpaket

##### IHR DIGITALES ZUSATZPAKET

Ihre Downloads zum Buch sind verfügbar unter www.digi4school.at. Auf der Rückseite des Buches finden Sie dafür einen Zugangscode. Einfach einmal kostenlos registrieren und die Dateien freischalten - Sie können aber auch einen anonymen Zugang wählen. Alle Infos dazu finden Sie unter www.digi4school.at.

---

{{Grafik: 1. Mathematik-Schularbeit 23.11.2015}}

Um das Erlernte gleich überprüfen zu können, finden Sie eine Auswahl von Schularbeiten samt Musterlösungen für diesen Jahrgang, die von den Autoren des Schulbuches im Unterricht eingesetzt wurden.

---

{{Grafik: TRUANER VERLAG Schulbuch}}

Mit interaktiven Übungen werden Sie auf die Beantwortung von geschlossenen Fragestellungen vorbereitet.

{{Grafik: YouTube: Die Geschichte der Mathematik (Die Sprache des Universums)}}

Mit einer Auswahl von Links auf Videos können Sie interessante Unterrichtseinstiege schaffen.

j-7

##### 7. SEMESTER

# !!1 Differenzen- und Differenzialquotient

## !!1.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen - Ein intuitiver Zugang

Der Begriff des Grenzwertes ist grundlegend für die mathematischen Entwicklungen, bei denen "unendlich viele" Glieder erfasst werden sollen.

Die erste "unendliche geometrische Reihe", (1/4) +(1/4)^2 +(1/4)^3 +..., hat Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) summiert. Er vollzog aber den Grenzübergang nicht, sondern brach die Entwicklung nach endlich vielen Schritten ab.

Rechnerisch wurde das Problem des Grenzwertes durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Isaac Newton (1643 bis 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) gelöst.

Die Grundlagen für den exakten Grenzwertbegriff wurden im 19. Jahrhundert etwa durch Augustin Louis Cauchy (1789 bis 1857) und Karl Weierstraß (1815 bis 1897) gelegt.

{{Grafik: Augustin Louis Cauchy, 1789 bis 1857, französischer Mathematiker}}

analysis: griechisch für Auflösung

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) den Begriff Grenzwert von Funktionen intuitiv erfassen und damit argumentieren,

-) en Begriff der Stetigkeit von Funktionen erklären und damit argumentieren,

-) Asymptoten von Funktionen ermitteln und deren Bedeutung erklären.\||

---

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie Grenzwerte von Funktionswerten ermittelt werden können. Die zur Berechnung benötigten Grenzwertsätze sind einfach und können intuitiv erfasst werden. Grenzwerte können durch grafische Methoden oder durch numerische Näherungsverfahren ermittelt werden.

Von Interesse ist das Verhalten einer Funktion

-) bei Annäherung der x-Werte an eine Stelle x\_0, also wenn die unabhängige Variable x gegen x\_0 geht: x -x\_0 und

-) im Unendlichen, also wenn die unabhängige Variable x gegen unendlich geht: x -> -'ue oder x -> 'ue

|T|: Sprechweise

x -> x\_0

"x strebt gegen x\_0"

x -> 'ue

"x strebt gegen unendlich"

##### Worum geht's hier?

Die Gesamtkosten für die Herstellung eines Produkts können durch die Funktion K beschrieben werden: K(x) =0,1 \*x^2 +x +10

x produzierte Menge in ME

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME

Die durchschnittlichen Kosten können durch die Funktion K^- beschrieben werden:

K^-(x) =K(x)/x =(0,1 \*x^2 +x +10)/x =0,1 \*x +1 +10/x

{{Lösung auf Seite 8}}

a.)

Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion K^-, wenn x gegen den Wert 10 strebt.

---

b.)

Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion K^-, wenn x gegen den Wert 0 strebt.

---

c.)

Ermitteln Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für K^-.

{{Grafik: Funktionsgraph von K^-}}

---

j-8

Lösung:

a.)

x: 9

K^-(x): 3,011111

x: 9,9

K^-(x): 3,000101

x: 9,99

K^-(x): 3,000001

x: x -> 10^-

K^-(x): K^-(x) -> 3

x: 11

K^-(x): 3,009091

x: 10,1

K^-(x): 3,000099

x: 10,01

K^-(x): 3,000001

x: x -> 10^+

K^-(x): K^-(x) -> -3

Nähert sich der x-Wert von links dem Wert 10, dann strebt der Funktionswert gegen den Wert 3.

Die Berechnung erfolgt mithilfe einer Wertetabelle.

Schreibweise: x -> 10^-, dann gilt: K^-(x) -> -3

Nähert sich der x-Wert von rechts dem Wert 10, dann strebt der Funktionswert ebenfalls gegen 3.

Schreibweise: x -> 10^+, dann gilt: K^-(x) -> 3

An der Stelle x =10 ist der Funktionswert K^-(10) =3.

An der Stelle x =10 ist der Funktionswert definiert und gleich dem Grenzwert.

Schreibweise: 'lim[x -> 'ue](K^-(x) =3)

---

b.)

x: -1

K^-(x): -9,1

x: -0,1

K^-(x): -99,01

x: -0,01

K^-(x): -999,001

x: x -> 0^-

K^-(x): K^-(x) -> 'ue

x: 1

K^-(x): 11,1

x: 0,1

K^-(x): 101,01

x: 0,01

K^-(x): 1001,001

x: x -> 0^+

K^-(x): K^-(x) -> +'ue

Nähert sich der x-Wert von links dem Wert 0, dann strebt der Funktionswert gegen -'ue.

Schreibweise: x -> 0^-, dann gilt: K^-(x) -> -'ue

(Diese Annäherung ist ökonomisch allerdings nicht sinnvoll, da es keine negativen Produktionsmengen gibt.)

Nähert sich der x-Wert von rechts dem Wert 0, dann strebt der Funktionswert gegen +'ue.

Schreibweise: x -> 0^-, dann gilt: K^-(x) -> +'ue

An der Stelle x =0 liegt eine Polstelle vor.

An der Stelle x =0 ist der Funktionswert nicht definiert.

---

c.)

Da negative Produktionsmengen nicht sinnvoll sind und K für x =0 nicht definiert ist, sind die Werte x >0 sinnvoll.

Somit gilt: D ='R^+

-----

x -> x\_0

"x strebt gegen x\_0"

x -> x\_0^-

"x strebt von links gegen x\_0"

x -> x\_0^+

"x strebt von rechts gegen x\_0"

x -> 'ue

"x strebt gegen unendlich"

---

+++Beispiel 1.1: |B, C|

Grenzwerte bei Definitionslücken

{{Lösung auf Seite 8 und 9}}

Stellen Sie die Funktion f mit f(x) =(x^2 -x)/(x^2 -1) grafisch dar. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f

a.) an der Stelle x =1 und

b.) an der Stelle x =-1.

Definitionsmenge D ='R\{-1; 1}

|!|

Wenn Sie x =-1 und x =1 in den Funktionsterm einsetzen, erhalten Sie eine Division durch null: f(-1) =2/0; f(1) =0/0

Die Funktion f ist an diesen beiden Stellen nicht definiert.

Die Zahlen -1 und 1 müssen bei der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

D ='R\{-1; 1}

|D|: Was passiert, wenn eine Zahl durch null dividiert wird?

Ist z.B. 2/0 =0/0?

---

Lösung:

{{Grafik: Funktionsgraph der Funktion f}}

x: -2,5

f(x): 1,4

x: -3

f(x): 1,5

x: 2,5

f(x): 1,66667

x: -2

f(x): 2

x: -1

f(x): undef

x: -0,5

f(x): -1

x: 0

f(x): 0

x: 0,5

f(x): 0,33333

x: 1

f(x): undef

x: 1,5

f(x): 0,6

x: 1,5

f(x): 0,6

x: 2

f(x): 0,66667

x: 2,5

f(x): 0,71492

x: 3

f(x): 0,75

Die Funktion ist an den Stellen x =-1 und x =1 nicht definiert.

Das Verhalten der Funktion an der Stelle x =-1 unterscheidet sich aber wesentlich vom Verhalten an der Stelle x =1.

---

j-9

a.)

An der Stelle x =1 liegt eine Lücke vor.

Zur Berechnung des Grenzwertes werden wieder die Funktionswerte berechnet, wenn x von links und von rechts gegen den Wert 1 strebt.

Annäherung an x =1 von links:

x: 0,9

f(x): 0,4737

x: 0,999

f(x): 0,499998

x: 0,99999

f(x): 0,499998

x: ...

f(x): ...

x: x -> -1

f(x): f(x) -> 0,5

Die Folge der x-Werte strebt von links gegen 1.

Die Folge der Funktionswerte strebt gegen 0,5.

Der linksseitige Grenzwert ist 0,5.

'lim[x -> 1^-](f(x)) =0,5

Annäherung an x =1 von rechts:

Die Folge der x-Werte strebt von rechts gegen 1.

Die Folge der Funktionswerte strebt gegen 0,5.

Der rechtsseitige Grenzwert ist 0,5.

'lim[x -> 1^+](f(x)) =0,5

Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen, hat die Funktion an der Stelle 1 den Grenzwert 0,5.

Man schreibt: 'lim[x -> 1](f(x)) =0,5

Man sagt: Die Funktion f hat an der Stelle x =1 eine Lücke.

---

|!|: Setzt man x =1 in den Funktionstherm ein, erhält man den unbestimmten Ausdruck f(1) =0/0.

Dieser Ausdruck ist nicht definiert, aber es existiert ein Grenzwert.

Sprechweise: "Der Limes von f von x für x strebt gegen 1 ist 0,5."

---

b.)

An der Stelle x = -1 "springt" die Funktion, die Funktionswerte links und rechts von x =-1 streben gegen unendlich. Dieses Verhalten kann rechnerisch durch eine geeignete Wertetabelle überprüft werden. Dazu werden die Funktionswerte berechnet, wenn x von links und von rechts gegen den Wert -1 strebt.

Annäherung an x =-1 von links:

x: -1,1

f(x): 11

x: -1,001

f(x): 1001

x: -1,00001

f(x): 100001

x: ...

f(x): ...

x: x -> -1^-

f(x): f(x) -> +'ue

Die Folge der x-Werte strebt von links gegen -1.

Die Folge der Funktionswerte strebt gegen +'ue.

Annäherung an x = -1 von rechts:

x: -0,9

f(x): -9

x: -0,999

f(x): -999

x: -0,99999

f(x): -99999

x: ...

f(x): ...

x: x -> -1^+

f(x): f(x) -> -'ue

Die Folge der x-Werte strebt von rechts gegen -1.

Die Folge der Funktionswerte strebt gegen -'ue.

An der Stelle x =-1 hat die Funktion keinen Grenzwert in den reellen Zahlen.

Man schreibt:

'lim[x -> -1](f(x)) =+-'ue

Man sagt: Die Funktion f hat an der Stelle x =-1 eine Polstelle.

---

|!|: Setzt man x =-1 in den Funktionstherm ein, erhält man den unbestimmten Ausdruck f(-1) =2/0.

Dieser Ausdruck ist nicht definiert, aber es existiert ein Grenzwert.

|T|: 'ue ist ein Begriff, aber keine reelle Zahle.

-----

##### Definition: Grenzwert einer Funktion

||g heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle x\_0, wenn für alle Folgen von x-Werten, die gegen x\_0 streben, die Folgen der zugehörigen Funktionswerte f(x) gegen denselben Grenzwert g streben. 'lim[x -> x\_0](f(x)) = g oder

'lim['De -> 0](f(x\_0 +'De x)) =g

{{Grafik: Funktionsgraph der Funktion f mit den eingetragenen Grenzwerten}}\||

---

Anschaulich ist g der Grenzwert der Funktion f an der Stelle x\_0, wenn alle Funktionswerte f(x\_0 +'De x) in der Nähe von g liegen, sobald die Werte x\_0 +'De x in der Nähe von x\_0 liegen.

j-10

##### Polstelle und Lücke einer Funktion

||Ist x\_0 eine Stelle, an der die Funktion f nicht definiert ist, dann heißt x\_0

Polstelle, wenn gilt: 'lim[x -> x\_0](f(x)) = +-'ue

Lücke, wenn der Grenzwert für x -> x\_0 existiert.\||

---

Salopp gilt:

Polstelle: f(x\_0) =Zahl/Null (Zahl \=0)

Lücke: f(x\_0) =Null/Null

+++Beispiel 1.2: |C|

Grenzwert einer ganzrationalen Funktion

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f mit f(x) =x^2 in der Nähe der Stelle x\_0 =1,5.

Lösung:

x: 1,4

f(x): 1,96

x: 1,499

f(x): 2,247

x: 1,49999

f(x): 2,24997

x: ...

f(x): ...

x: x -> 1,5^-

f(x): f(x) -> 2,25

'lim[x -> 1,5^-](f(x)) =2,25

x: 1,6

f(x): 2,56

x: 1,501

f(x): 2,253

x: 1,50001

f(x): 2,25003

x: ...

f(x): ...

x: x -> 1,5^+

f(x): f(x) -> 2,25

'lim[x -> 1,5^+](f(x)) =2,25

Es zeigt sich: Je näher sich die x-Werte an x\_0 =1,5 annähern, umso näher liegen die zugehörigen Funktionswerte bei x\_0 =2,25.

Nimmt man beliebige Zahlenfolgen, die gegen x\_0 =1,5 streben, so konvergiert die zugehörige Folge der Funktionswerte f(x) ebenfalls - und zwar gegen 2,25.

Für alle Folgen von x-Werten, die gegen x\_0 =1,5 streben, streben die zugehörigen Folgen der Funktionswerte f(x) demselben Grenzwert g =2,25 zu.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f(1,5) =2,25

Dieser Funktionswert ist gleich dem Grenzwert.

'lim[x -> 1,5](x^2) =2,25

Punkt gehört dem Graphen der Funktion an.

Punkt gehört nicht dem Graphen der Funktion an.

-----

+++Beispiel 1.3: |B, C|

Grenzwerte von rationalen Funktionen

Stellen Sie die Funktion f mit f(x) =(x^2 -9)/(x -3) mit D ='R\{3} grafisch dar und untersuchen Sie f an der Stelle x\_0 =3.

Lösung:

Die Funktion f ist an der Stelle x\_0 =3 nicht definiert.

Setzt man x\_0 =3 in den Funktionsterm ein, erhält man den unbestimmten Ausdruck 0/0.

x: 2,9

f(x): 5,9

x: 2,999

f(x): 5,999

x: 2,99999

f(x): 5,99999

x: ...

f(x): ...

x: x -> 3^-

f(x): f(x) -> 6

'lim[x -> 3^-](f(x)) =6

x: 33,1

f(x): 6,1

x: 3,001

f(x): 6,001

x: 3,00001

f(x): 6,00001

x: ...

f(x): ...

x: x -> 3^+

f(x): f(x) -> 6

'lim[x -> 3^+](f(x)) =6

Bei beliebiger Annäherung der x-Werte an die Stelle 3 streben die Funktionswerte gegen den Grenzwert 6.

g = 'lim[x -> 3](f(x)) =6

Die Stelle x\_0 =3 ist daher eine Lücke.

---

|!|: f(3) =0/0

Dieser Ausdruck ist nicht definiert, aber es existiert ein Grenzwert.

'lim[x -> 3]((x^2 -9)/(x -3)) =6

{{Grafik: Funktionsgraph von f}}

{{Grafik: CAS}}

-----

j-11

Die folgenden drei Grafiken zeigen, dass die Existenz eines Grenzwertes für x -> x\_0 nicht davon abhängig ist, ob an einer Stelle x\_0 ein Funktionswert f(x\_0) existiert oder nicht.

f\_1(x) \*(x^2 -9)/(x -3) für x \=3

|!|: Für x \=3 gilt: (x^2 -9)/(x -3) =((x +3) \*(x -3))/(x -3) =x +3

{{Grafik: Funktionsgraph von f\_1}}

Die Funktion f\_1 ist an der Stelle x\_0 =3 nicht definiert, sie hat aber für x-> 3 den Grenzwert

'lim[x -> 3](f\_1(x)) =6

---

f\_2(x) ={[(x^2 -9)/(x -3) für x \=3] [5 für x =3]

{{Grafik: Funktionsgraph von f\_2}}

Die Funktion f\_2 ist an der Stelle x\_0 =3 definiert. Sie hat dort den Funktionswert f\_2(3) =5.

Die Funktion hat aber für x ->3 den Grenzwert

'lim[x-3](f\_2(x)) =6

---

f\_3(x) =x +3

{{Grafik: Funktionsgraph von f\_3}}

Die Funktion f\_3 ist die einzige der drei gegebenen Funktionen, für die der Grenzwert für x -3 mit dem Funktionswert übereinstimmt.

f\_3(3) ='lim[x -> 3](f\_3(x)) =6

---

Allgemein gilt:

Der Grenzwert an der Stelle x\_0 muss nicht mit dem Funktionswert f(x\_0) an dieser Stelle x\_0 übereinstimmen.

Es gilt: 'lim[x -> 3](f\_1(x)) ='lim[x -> 3](f\_2(x)) ='lim[x -> 3](f\_3(x)) =6

---

+++Beispiel 1.4: |B, C|

Grenzwert einer rationalen Funktion

a.)

Stellen Sie die Funktion f mit f(x) =(x +3)/((x -2)^2) mit D ='R\{2} grafisch dar.

---

b.)

Untersuchen Sie f an der Stelle x\_0 =2 auf ihren Grenzwert.

---

Lösung:

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph von f}}

x\_0 =2 ist eine Polstelle. Die Funktionswerte streben gegen unendlich.

---

b.)

Setzen Sie x\_0 =2 in den Funktionsterm von f ein, dann erhalten Sie 5/0.

Die Division durch null ist nicht zulässig und somit ist die Funktion f an der Stelle x\_0 =2 nicht definiert.

Für x -> 2 streben die Funktionswerte der Funktion f gegen unendlich.

Man schreibt: 'lim[x -> 2](f(x)) =+'ue

und sagt:

"Die Funktion hat bei x\_0 =2 eine Polstelle. An dieser Stelle hat die Funktion keinen Grenzwert in den reellen Zahlen."

j-12

+++Beispiel 1.5: |D|

Grenzwerte

Überprüfen Sie, ob der Grenzwert g der Funktion f an der angegebenen Stelle x\_0 existiert.

f(x) =x^2

f(x) =(x^2 -9)/(x -3); x\_0 =3

f(x) =(x +3)/((x -2)^2); x\_0 =2

Lösung:

f(x) =x^2

{{Grafik: Funktionsgraph der Funktion f}}

Der Grenzwert g existiert, weil alle f(x\_0 +'De x) in der Nähe von g liegen, sobald alle x\_0 +'De x nahe x\_0 liegen. Das gilt für jede Stelle.

---

f(x) =(x^2 -9)/(x -3); x\_0 =3

{{Grafik: Funktionsgraph der Funktion f}}

Der Grenzwert g existiert, der Funktionswert an der Stelle x\_0 =3 ist aber nicht definiert. Die Funktion f hat an der Stelle x\_0 eine Lücke.

---

f(x) =(x +3)/((x -2)^2); x\_0 =2

{{Grafik: Funktionsgraph der Funktion f}}

Der Grenzwert g existiert nicht. Die Funktion f hat an der Stelle x\_0 =2 eine Polstelle.

---

Punkt gehört dem Graphen der Funktion an

Punkt gehört nicht dem Graphen der Funktion an

-----

Für die Berechnung von Grenzwerten von zusammengesetzten Funktionen gelten einfache Regeln.

##### Grenzwertsätze

|| U, V, x\_0, k 'el 'R

'lim[x -> x\_0](u(x)) =U

'lim[x -> x\_0](v(x)) =V

'lim[x -> x\_0](u(x) +-v(x)) U+-V

'lim[x -> x\_0](u(x) \*v(x)) =U \*V

'lim[x -> x\_0](k \*v(x)) =k \*V

'lim[x -> x\_0](u(x)/v(x)) U/V; V\=0\||

---

+++Beispiel 1.6: |B|

Berechnung des Grenzwertes von Funktionen

a.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) =x^2 an der Stelle x\_0 =1,5.

---

b.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) =(x^2 -9)/(x -3), D ='R{3} an der Stelle x\_0 =3.

---

c.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) f(x) =(x +3)/((x -2)^2), D ='R{2} an der Stelle x\_0 =2.

---

{{Lösung auf Seite 12 und 13}}

|T|: Tipp:

Ersetzen Sie x durch x\_0 +'De x und berechnen Sie den Grenzwert für 'De -> 0.

'lim[x -> x\_0](f(x)) ='lim['De x -> 0](f(x\_0 +'De x)) =g

...

|!|: Das Kürzen durch 'De x ist möglich, da vor dem Grenzübergang alle 'De x \=0 sind.

---

Lösung:

a.)

Ersetzen Sie x durch (1,5 +'De x) und bilden Sie den Grenzwert für 'De x -> 0.

'lim[x -> 1,5](x^2) ='lim['De x -> 0]((1,5 +'De x)^2) ='lim['De x -> 0](2,25 +3 \*'De x +('De x)^2) =2,25 +3 \*0 +0^2 =2,25

---

b.)

Ersetzen Sie x durch (3 +'De x) und bilden Sie den Grenzwert für 'De x \_>0.

'lim[x -> 3]((x^2 -9)/(x -3)) ='lim['De x -> 0](f(3 +'De x)) ='lim['De x -> 0](((3 +'De x)^2 -9)/((3 +'De x) -3)) ='lim['De x -> 0](6 +'De x) =6 +0 =6

Die Funktion f ist an der Stelle 3 nicht definiert, aber es existiert der Grenzwert der Funktion.

---

j-13

c.)

Ersetzen Sie x durch (2 +'De x) und bilden Sie den Grenzwert für 'De x ->0.

'lim[x -> 2]((x +3)/(x -2)^2) ='lim['De x -> 0]((2 +'De x +3)/((2 +'De x -2)^2)) ='lim['De x -> 0]((5 +'De x)/(('De x)^2)) ='lim['De x ->0](5/(('De x)^2) +1/('De x)) ='ue

Da 'lim['De x ->0](5/(('De x)^2) +1/('De x)) nicht existiert, hat die Funktion f an der Stelle 2 keinen Grenzwert.

-----

##### Grenzwert von Funktionen im Unendlichen

Sie können das Verhalten einer Funktion im Unendlichen abschätzen, indem Sie für x immer größere Werte einsetzen.

Zur Berechnung des Grenzwertes einer rationalen Funktion f im Unendlichen dividieren Sie zunächst Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von x.

Im zweiten Schritt verwenden Sie: 'lim[x -> 'ue](1/x) ='lim[x -> 'ue](1/(x^2)) =... ='lim[x -> 'ue](1/(x^k)) =0

---

Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.

Albert Einstein, 1879 bis 1955, deutscher Physiker

---

+++Beispiel 1.7: |B|

Grenzwert von Funktionen im Unendlichen

a.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) =(x^2 -x)/(x^2 -1), D ='R\{-1; 1} für x -> 'ue.

---

b.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) =(x +3)/((x -2)^2), D ='R\{2} für x -> 'ue.

---

c.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) ='e^(-x) im Unendlichen.

---

d.)

Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion f mit f(x) =100/(1 +4 \*'e^(-0,2 \*x) und x >= 0 für x -> 'ue.

---

Lösung:

a.)

'lim[x -> 'ue](x^2 -x)/(x^2 -1) ='lim[x -> 'ue]((1 -1/x)// (1 -1/(x^2))) =(1 -0)/(1 -0) =1

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Graph der Funktion f nähert sich im Unendlichen der Geraden y =1, d. h. einer Parallelen zur x-Achse im Abstand 1, immer mehr an.

Die Gerade y =1 ist Asymptote.

---

b.)

'lim[x -> 'ue]((x +3)/((x -2)^2) ='lim[x -> 'ue]((x +3)/(x^2 -4 \*x +4)) ='lim[x -> 'ue]((1/x +3/(x^2))// (1 -4/x +4/(x^2))) =(0 +0)/(1 -0 +0) =0

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Graph der Funktion f nähert sich im Unendlichen der Geraden y =0, d. h. der x-Achse, immer mehr an.

Die x-Achse ist Asymptote.

---

c.)

Die x-Achse ist Asymptote. Da 'e^x für x -> 'ue über alle Grenzen wächst, gilt:

'lim[x -> 'ue]('e^(-x)) ='lim[x -> 'ue](1/('e^x)) =0

---

d.)

Die Gerade y =100 ist Asymptote. Da 'lim[x -> 'ue]('e^(-0,2x) =0, gilt:

'lim[x -> 'ue](100/(1 +4 \*'e^(-0,2 \*x))) =100/(1 +4 \*0) =100

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

|T|: 'lim[x -> 'ue]('e^(-k \*x)) =0

-----

##### Asymptote

||Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion f bei immer größer werdendem Abstand vom Koordinatenursprung immer weiter annähert, heißt Asymptote von f.\||

---

j-14

##### Grenzwertsätze für x ->'ue

||U, V, x\_0, k 'el 'R

'lim[x -> 'ue](u(x)) =U

'lim[x -> 'ue](v(x)) =V

'lim[x -> 'ue](u(x) +-v(x)) U+-V

'lim[x -> 'ue](u(x) \*v(x)) =U \*V

'lim[x -> 'ue](k \*v(x)) =k \*V

'lim[x -> 'ue](u(x)/v(x)) U/V; V\=0

'lim[x -> 'ue](1/x) ='lim[x -> 'ue](1/(x^2)) =... ='lim[x -> 'ue](1/(x^k)) =0\||

---

##### Stetigkeit einer Funktion

Oft werden Messwerte von empirisch ermittelten Datenpaaren in zusammenhängenden Kurven dargestellt. Dabei setzt man voraus, dass üblicherweise Funktionswerte nicht regellos von einem Funktionswert zu einem anderen Wert springen, ohne die Funktionswerte dazwischen anzunehmen.

Jede Funktion mit y =f(x), deren Graph ohne Absetzen des Zeichenstiftes gezeichnet werden kann, ist ein Beispiel einer stetigen Funktion.

Die Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis und wird hier zunächst anschaulich erklärt.

+++Beispiel 1.8:

Stetige und unstetige Funktionen

{{Grafik: Vor einem Zebrastreifen bremst Frau M. stark ab.}}

a.)

Frau M. unternimmt eine kurze Autofahrt in der Stadt. Anfangs beschleunigt sie das Auto und fährt dann einige Zeit mit fast konstanter Geschwindigkeit.

Vor einem Zebrastreifen muss sie das Auto stark abbremsen, danach beschleunigt sie wieder kurz und kommt schließlich ans Ziel.

Die Grafik zeigt die Geschwindigkeit des Autos während der Fahrt.

{{Grafik: Geschwindigkeit eines Autos während der Fahrt.}}

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm kann ohne Absetzen gezeichnet werden. Man sagt: Die Geschwindigkeitsfunktion ist stetig.

---

b.)

Tarife einer Tiefgarage:

{{Grafik: Medicent Innsbruck}}

Innrain 143

6020 Innsbruck

Öffnungszeiten: 0 -24 h

Stellplätze: 160

Parkplatztyp: Tiefgarage

Einfahrtshöhe: 2,30 m

Tarife\*:

1. Std.: 2,20 €

je weitere 1/2 Std.: 1,10 €

Tagesmaximum: 15,00 €

Das Parken in einer Tiefgarage kostet

-) für die erste Stunde 2,20 €,

-) für jede weitere halbe Stunde 1,10 € und

-) maximal pro Tag 15,00 €.

Stellen Sie den Tarif in Abhängigkeit von der Parkdauer grafisch dar:

{{Grafik: Grafische Darstellung des Tarifs in Abhängigkeit von der Parkdauer}}

Der Graph zeigt eine Sprungstelle bei der Parkdauer 1 h und dann nach jeder weiteren halben Stunde bis 6,5 h.

Man sagt: Die Tariffunktion ist unstetig.

-----

j-15

##### Grafische Interpretation der Stetigkeit

||Der Graph einer zusammenhängenden Funktion ist stetig, d. h., er kann ohne Absetzen gezeichnet werden.\||

---

Die grafische Interpretation der Stetigkeit ist zu unpräzise.

Definition der Stetigkeit mithilfe des Grenzwertes:

Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x\_0 muss existieren und mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmen.

Der Graph einer stetigen Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden.

##### Definition: Stetigkeit

||Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x\_0 'el D, wenn

-) der Grenzwert 'lim[x -> x\_0](f(x)) existiert, und

-) der Grenzwert mit dem Funktionswert an dieser Stelle x0 übereinstimmt. 'lim['De x -> 0](f(x\_0 +'De x)) =f(x\_0)\||

---

Stetig an der Stelle x\_0 bedeutet:

Der Grenzwert der Funktion bei x\_0 ist gleich dem Funktionswert bei x\_0.

Ist eine der zwei Forderungen der Stetigkeitsdefinition nicht erfüllt, dann ist die Funktion f unstetig an der Stelle x\_0.

##### Definition: Stetigkeit in einem Intervall

||Eine Funktion f ist stetig in einem Intervall, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls stetig ist.\||

---

##### Typen stetiger und unstetiger Funktionen

||Die Graphen zeigen einige typische Fälle für Stetigkeit und Unstetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x\_0.

{{Grafik: f stetig und glatt}}

f stetig und glatt

'lim[x -> x\_0](f(x)) =f(x\_0)

{{Grafik: f stetig mit Knick}}

f stetig mit Knick

'lim[x -> x\_0](f(x)) =f(x\_0)

{{Grafik: f stetig auf D ='R\{x\_0}}}

f stetig auf D ='R\{x\_0}

Lücke an der Stelle x\_0 'lim[x -> x\_0](f(x)) existiert, f(x\_0) existiert nicht

{{Grafik: unstetig an der Stelle x\_0; Sprungstelle x\_0}}

unstetig an der Stelle x\_0; Sprungstelle x\_0

'lim[x -> x\_0](f(x)) existiert nicht, f(x\_0) existiert

{{Grafik: stetig auf D ='R\{x\_0}}}

stetig auf D ='R\{x\_0}

Pol an der Stelle x\_0; 'lim[x -> x\_0](f(x)) existiert nicht, f(x\_0) existiert nicht\||

---

|T|: Von Stetigkeit kann man nur an einer Stelle x\_0 'el D sprechen, an der die Funktion auch definiert ist.

j-16

+++Beispiel 1.9: |B, C, D|

Stetige und unstetige Funktionen

{{Grafik: 3 Funktionsgraphen}}

Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen in Hinblick auf ihre Stetigkeit.

a.)

Die Funktion f mit f(x) =x^2 hat an der Stelle x\_0 =1,5 den Grenzwert 2,25 und stimmt dort mit dem Funktionswert überein. Dies gilt für alle Stellen x\_0 'el 'R:

g ='lim['De x -> 0](f(x\_0 +'De x) ='lim['De x -> 0]((x\_0 +'De x)^2) ='lim['De x -> 0](x\_0^2 +2 \*x\_0 \*'De x +('De x)^2) =x\_0^2 =f(x\_0)

Für alle x\_0 'el 'R stimmt der Grenzwert der Funktion mit dem Funktionswert überein. Die Funktion f ist daher im ganzen Definitionsbereich stetig.

---

b.)

Die Funktion f mit f(x) =(x^2 -9)/(x -3), D ='R\{3}, an der Stelle x\_0 =3. f ist für x\_0 =3 nicht definiert.

Es liegt eine Definitionslücke vor. Der Graph ist unterbrochen. Die Funktion f ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich D ='R\{3} stetig. Allerdings existiert der Grenzwert der Funktion an der Stelle 3, er beträgt 6.

An der Stelle x\_0 =3 ist f weder stetig noch unstetig, sondern einfach nicht definiert. Man sagt: Die Stelle 3 ist eine hebbare Lücke.

Die Lücke ist hebbar, da die Funktion an der Stelle x\_0 =3 durch den Grenzwert zu einer stetigen Funktion ergänzt werden kann.

Hier kann f durch f(3) =6 stetig ergänzt werden.

---

c.)

Die Funktion f mit f(x) =(x +3)/((x -2)^2), D ='R\{2}, an der Stelle x\_0 =2.

f ist für x\_0 =2 nicht definiert. Es liegt ein Pol vor.

Die Funktion f ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich D ='R \{2} stetig.

Da der Grenzwert der Funktion bei x\_0 =2 nicht existiert, ist die Stelle 2 eine Polstelle. Diese Unterbrechung ist nicht hebbar.

-----

|T|: Stetigkeit an der Stelle x\_0

'lim['De x -> 0](f(x\_0 +'De x) =f(x\_0)

Sind die Funktionen f und g stetig, dann sind auch

-) f +g,

-) f -g,

-) f \*g und

-) f/g (im Definitionsbereich)

stetig.

---

##### Stetigkeit elementarer Funktionen

||-) Die konstante und die lineare Funktion sind in 'R stetig.

-) Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) f mit y=a\_n \*x^n +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0 sind in 'R stetig. für a\_0, a\_1, ..., a\_n 'el 'R

-) Gebrochenrationale Funktionen f mit y =(P(x))/(Q(x)), P und Q Polynome, sind im Definitionsbereich D ='R\{x | Q(x) =0} stetig.\||

---

Begründung:

-) Die konstante Funktion f mit f(x) =c ist an jeder Stelle x\_0 stetig, da g ='lim['De x -> 0](f(x\_0) +'De x)) ='lim['De x -> 0](c) =c =f(x\_0)

-) Die lineare Funktion f mit f(x) =a \*x, a \=0, ist an jeder Stelle x\_0 stetig, da g ='lim['De x -> 0](f(x\_0 +'De x)) ='lim['De x -> 0](a \*(x\_0 +'De x)) =a \*x\_0 =f(x\_0).

-) Aus der konstanten und der linearen Funktion lassen sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation ganzrationale Funktionen zusammensetzen. Da die konstante und die lineare Funktion stetig sind, sind wegen der Grenzwertsätze auch ganzrationale Funktionen stetig.

-) Gebrochenrationale Funktionen entstehen durch Division stetiger ganzrationaler Funktionen. Wegen der Grenzwertsätze sind sie überall in D stetig.

##### Nullstellen

Eine häufig gestellte Aufgabe ist die Ermittlung der Nullstellen von Funktionen. Anschaulich ist klar:

Eine Funktion f hat an der Stelle x\_0 einen Schnittpunkt mit der x-Achse, wenn ihr Graph an dieser Stelle die x-Achse mit der Gleichung y =0 schneidet. Dies besagt der Nullstellensatz für stetige Funktionen.

j-17

##### Nullstellensatz für stetige Funktionen

||Ist eine Funktion f stetig und haben die Funktionswerte an den Randstellen x\_1 und x\_2 verschiedene Vorzeichen, so gibt es im Intervall [x\_1; x\_2] mindestens eine reelle Nullstelle x\_0 mit f(x\_0) =0.

{{Grafik: Funktionsgraph von f}}\||

---

Der Nullstellensatz gilt nicht für Funktionen mit Definitionslücken

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei unstetigen Funktionen und Funktionen mit Definitionslücken kann es Intervalle ohne Nullstelle geben, obwohl das Vorzeichen des Funktionswerts wechselt.

---

##### Asymptoten

+++Beispiel 1.10: |B|

Asymptoten einer Hyperbel

Die Hyperbel f mit y =1 D ='R\{0}, hat an der Stelle x\_0 =0 keinen Grenzwert.

Dort nähert sich der Graph der Funktion der y-Achse an, der Funktionswert springt von '-ue nach 'ue.

Die Stelle 0 ist eine Polstelle.

Die y-Achse mit x =0 ist die vertikale Asymptote der Hyperbel.

Für x -> +-'ue nähern sich die Hyperbel-Äste der x-Achse: 'lim[x -> +-'ue](1/x) =0

Die x-Achse mit y =0 ist die horizontale Asymptote der Hyperbel.

-----

##### Definition: Asymptote

||Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion f bei immer größer werdendem Abstand vom Koordinatenursprung immer weiter annähert, heißt Asymptote von f.\||

---

asymptotos: griechisch für nicht zusammenfallend

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

##### Typen von Asymptoten

||-) Asymptote an einer Polstelle: An einer Polstelle x0 ist die zur y-Achse parallele Gerade mit x =x\_0 die Asymptote von f: 'lim[x -> x\_0](f(x)) =+-'ue

-) Asymptote für das Verhalten im Unendlichen: Eine Gerade a ist Asymptote von f für x -> 'ue, wenn 'lim[x -> 'ue](f(x) -a(x)) =0.

Analoges gilt für die Asymptote von f, wenn x -> -'ue.

Diese Asymptoten lassen sich bei gebrochenrationalen Funktionen durch Polynomdivision ermitteln.\||

---

+++Beispiel 1.11: |B|

Asymptoten gebrochenrationaler Funktionen

Ermitteln Sie die Asymptoten der gegebenen Funktionen.

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f mit y =1/(x -1), D ='R\{1}, hat die Polstelle x\_0 =1.

Daher ist die Gerade x =1 eine vertikale Asymptote der Funktion f.

Da 'lim[x -> 'ue](1/(x -1), ist die x-Achse y =0 eine weitere Asymptote.

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f mit y =x/(x -1), D ='R\{1}, hat die Polstelle x\_0 =1, daher ist die Gerade x =1 eine Asymptote.

Polynomdivision: x/(x -1) =1; Restterm: 1

Es gilt: y =x/(x -1) =1 +1/(x -1)

Die Gerade a mit y =1 (ganzrationaler Term von f) ist eine weitere Asymptote.

---

j-18

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f mit y =(x^2)/(x -1); D ='R\{1}, hat die Polstelle x\_0 =1, daher ist die Gerade x =1 eine Asymptote.

Polynomdivision: x^2/(x -1) =x +1; Restterm: 1

Es gilt: y =(x^2)/(x -1) =x +1 +1/(x -1)

Die Gerade a mit y =x +1 (ganzrationaler Term von f) ist eine weitere Asymptote.

{{Grafik: CAS}}

-----

##### Symmetrie

Wegen (-x)^(2 \*n) =x^(2 \*n) sind alle Potenzfunktionen mit gerader Hochzahl gerade,

wegen (-x)^(2 \*n +1) =-x^(2 \*n +1) sind alle Potenzfunktionen mit ungerader Hochzahl ungerade.

---

##### Definition: Gerade und ungerade Funktion

||Eine Funktion f heißt gerade, wenn ihr Graph achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist, d. h., wenn für alle x 'el D gilt:

f(-x) =f(x)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Eine Funktion f heißt ungerade, wenn ihr Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, d. h., wenn für alle x 'el D gilt:

f(-x) =-f(x)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}\||

---

+++Beispiel 1.12: |B, D|

Gerade und ungerade Funktionen

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph}}

Die Funktion f mit f(x) =x^4 -2 \*x^2 +5 ist gerade, denn: f(-x) =(-x)^4 -2 \*(-x)^2 +5 =x^4 -2 \*x^2 +5 =f(x)

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f mit f(x) =2 \*x^5 -4 \*x^3 ist ungerade, denn:

f(-x) =2 \*(-x)^5 -4 \*(-x)^3 =-2 \*x^5 +4 \*x^3 =-(2 \*x^5 -4 \*x^3) =-f(x)

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

---

j-19

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph}}

Die Funktion f mit f(x) =x^3 +1 ist weder gerade noch ungerade, denn:

f(-x) =(-x)^3 +1 =-x^3 +1

Da -x^3 +1 \*x^3 +1 =f(x) und -x^3 +1 \*-x^3 -1 =-f(x), ist die Funktion weder gerade noch ungerade.

-----

##### Gerade und ungerade Polynomfunktionen

||-) Polynomfunktionen mit ausschließlich geraden Hochzahlen sind gerade und deren Graphen damit achsensymmetrisch zur y-Achse.

-) Polynomfunktionen mit ausschließlich ungeraden Hochzahlen sind ungerade und deren Graphen damit punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.\||

---

+++Beispiel 1.13: |D|

Gerade und ungerade Funktionen

Gerade Funktion: f(-x) =f(x)

Ungerade Funktion: f(-x) =-f(x)

Die unten abgebildeten Funktionsgraphen sind symmetrisch bezüglich

{{Grafik: Funktionsgraph einer symmetrischen Funktion bezüglich der y-Achse}}

Diese Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

{{Grafik: Funktionsgraph einer symmetrischen Funktion bezüglich der y-Achse}}

Diese Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

{{Grafik: Funktionsgraph einer symmetrischen Funktion bezüglich des Koordinatenursprungs}}

Diese Funktion ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

{{Grafik: Funktionsgraph einer symmetrischen Funktion bezüglich der y-Achse}}

Diese Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

-----

Max hat im Heft aufgeschrieben:

{{Grafik: nicht übertragen}}

In der Schularbeit rechnet er:

{{Grafik: nicht übertragen}}

Welchen Fehler hat er gemacht?

---

##### Übungsaufgaben

+++1.001 |B, C, D|

Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion f für x -> x\_0.

Begründen Sie, ob an der Stelle x\_0 ein Funktionswert, eine Lücke oder eine Polstelle vorliegt.

a.)

f(x) =x -3

x\_0 =2

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^2)/x

x\_0 =0

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 -4)/(x +2)

x\_0 =-2

**[]**

---

d.)

f(x) =(4 -x)/(4 +x)

x\_0 =-4

**[]**

---

e.)

f(x) =(x2 -5 \*x)/(x^2 -25)

x\_0 =5

**[]**

---

f.)

f(x) =(x -3)/(x^2 -9)

x\_0 =3

**[]**

---

g.)

f(x) =(x^2 -3 \*x)/(x^2 -x -6)

x\_0 =3

**[]**

-----

j-20

|T|:

Trick für die Grenzwertberechnung gebrochenrationaler Funktionen für x -> 'ue:

Dividieren Sie Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz von x.

Setzen Sie für die Variable x große Zahlen ein, um den Grenzwert für x -> 'ue abzuschätzen.

---

Punkt gehört dem Graphen der Funktion an

Punkt gehört nicht dem Graphen der Funktion an

---

+++1.002 |B|

Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktion f mit f(x) =(x^2 -3 \*x)/(x^2 -x -6)

a.)

'lim[x -> 0](f(x))

**[]**

---

b.)

'lim[x -> 1](f(x))

**[]**

---

c.)

'lim[x -> -2](f(x))

**[]**

---

d.)

'lim[x -> 3](f(x))

**[]**

-----

+++1.003 |B|

Ermitteln Sie den Grenzwert von:

a.)

f(x) =(2 \*x)/(x -1)

für y -> 'ue

**[]**

---

b.)

f(x) =(2 \*x +4)/(3 \*x -2)

für y -> 'ue

**[]**

---

c.)

f(x) =(3 \*x^5 -1)/(x^5 -x^4 +x^2 -1)

für y -> 'ue

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^4 -2 \*x +12)/(17 \*x^3 -2 \*x^2)

für y -> 'ue

**[]**

---

e.)

f(x) =(x^2 -12 \*x +47)/(x^3 -12 \*x +4)

für y -> 'ue

**[]**

---

f.)

f(x) =((x^2 -1) \*x)/(x -1)

für y -> 'ue

**[]**

---

g.)

f(x) ='e^(-x)

für y -> 'ue

**[]**

---

h.)

f(x) =50/(1 +4 \*'e^(-0,1 \*x))

für y -> 'ue

**[]**

---

i.)

f(x) =100/(4 +5 \*'e^(0,02 \*x))

für y -> 'ue

**[]**

---

j.)

f(x) =(2 \*'e^(0,03 \*x))/(19 +'e^(0,03 \*x))

für y -> 'ue

**[]**

-----

+++1.004 |A, D|

Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung die Definitionsmenge der Funktion. Bestimmen Sie, ob die Funktion an den Stellen x\_1 bis x\_6 stetig oder unstetig ist. Bestimmen Sie, ob eine Definitionslücke, eine Polstelle oder eine Sprungstelle vorliegt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

**[]**

-----

+++1.005 |B, D|

Zeichnen Sie jeweils den Graphen und begründen Sie, ob die Funktion stetig oder unstetig ist. Geben Sie Lücken und Polstellen an.

a.)

f(x) =x^2 -4

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2 -2 \*x +5

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 -4)/(x +2)

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^2)/x

**[]**

---

e.)

f(x) =(2 \*x)/(x -1)

**[]**

---

f.)

f(x) =(4 -x)/(4 +x)

**[]**

-----

+++1.006 |B|

Ermitteln Sie von den angegebenen Funktionen die Definitionsmenge und die Gleichungen der Asymptoten.

Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen mit den Asymptoten.

a.)

f(x) =2/(x -1)

**[]**

---

b.)

f(x) =(x +2)/(x -1)

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 +x +2)/(x -1)

**[]**

-----

+++1.007 |B|

a.)

Berechnen Sie für die Funktion f mit f(x) =(x^2 +3 \*x -4)/(x^2 -1) die Definitionsmenge, die Gleichungen der Asymptoten und die angeführten Grenzwerte.

'lim[x -> -1](f(x))

**[]**

'lim[x -> 0](f(x))

**[]**

'lim[x -> 1](f(x))

**[]**

'lim[x -> 'ue](f(x))

**[]**

---

b.)

Hinweis zu Übungsaufgabe 1.007 b: x^2 +x -6 =(x +3)(x -2)

Wie a.), aber für die Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2)

'lim[x -> 1](f(x))

**[]**

'lim[x -> 0](f(x))

**[]**

'lim[x -> 2](f(x))

**[]**

'lim[x -> -3](f(x))

**[]**

-----

+++1.008 |B|

Hinweis zu Übungsaufgabe 1.008: x^2 -x -2 =(x -2) \*(x +1).

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2).

a.)

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2) die Definitionsmenge.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2) die Unstetigkeitsstellen.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2) die Polstelle(n).

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2) die Asymptoten.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie von der Funktion f mit f(x) =(x^3 -4 \*x)/(x^2 -x -2) die Grenzwerte 'lim[x -> -1](f(x)), 'lim[x -> 0](f(x)) und 'lim[x -> 2](f(x)).

**[]**

---

f.) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion einschließlich Polstelle(n) und Asymptoten.

**[]**

-----

j-21

|T|: Gerade Funktion: f(-x) =f(x)

symmetrisch bezüglich der y-Achse

Ungerade Funktion: f(-x) =-f(x)

symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs

---

+++1.009 |B, D|

Prüfen Sie, ob die Funktion f gerade oder ungerade, d. h. symmetrisch bezüglich der y-Achse oder des Koordinatenursprungs ist.

Begründen Sie die Entscheidung rechnerisch.

Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen der Funktion.

a.)

f(x) =x^2 -1

**[]**

---

b.)

f(x) =2 \*x^3 +4 \*x

**[]**

---

c.)

f(x) =1/x

**[]**

---

d.)

f(x) ='e^x

**[]**

---

e.)

f(x) ='e^(-x^2)

**[]**

-----

## !!1.2 Differenzen- und Differenzialquotient

Die Ursprünge der Differenzialrechnung gehen nach heutigen Erkenntnissen auf die Griechen zurück. Als Begründer der Differenzialrechnung gilt heute das Universalgenie Archimedes von Syrakus (vermutlich um 285 v. Chr. bis 212). Archimedes entwickelte ein Verfahren zur Volumsberechnung von Körpern, in dem er diese in eine unendliche Menge einzelner Flächen aufteilte. Dieses Verfahren ging leider in den Wirren der Geschichte verloren und wurde erst ca. 1800 Jahre nach Archimedes wieder neu erfunden.

In der Antike löste man das Tangentenproblem auf algebraischem Weg ohne infinitesimale Überlegungen (das sind Überlegungen mit unendlich kleinen Schritten). Ohne infinitesimale Überlegungen arbeiten auch heute viele Computerprogramme.

Den ersten bedeutenden Beitrag zum Tangentenproblem in infinitesimaler Darstellung leistete der Franzose Pierre Fermat (1601 bis 1665). Fermat entwickelte 1629 eine allgemeine Methode zur Auffindung von Extremstellen einer gegebenen Funktion. Mit dieser gelang es ihm, auch die Steigungen der Tangenten zu berechnen. Diese Methode entspricht etwa dem, was man heute macht, wenn man die erste Ableitung verwendet. Dabei hat Fermat nicht daran gedacht, 'De x als unendlich klein aufzufassen, sondern bei ihm ist 'De x immer - wenn auch klein - von endlicher Größe.

Der wichtige Schritt, aus den zahlreichen Einzelmethoden der Tangentenberechnung unsere heutige Differenzialrechnung zu schaffen, gelang dem Deutschen Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716). Auch die heute noch übliche Schreibweise in der Differenzialrechnung geht auf die Schreibweise von Leibniz zurück. Die von Leibniz eingeführte Methode macht das Differenzieren zu einer fast mechanischen Tätigkeit, während vor Leibniz in jedem Einzelfall spezielle Grenzwertüberlegungen nötig waren.

Den Ruhm der Erfindung der Differenzialrechnung muss er sich mit dem großen englischen Physiker und Mathematiker Isaac Newton (1643 bis 1727) teilen. Newton hat sogar seine dem leibnizschen Verfahren entsprechende Fluxionsrechnung (von Newton geprägte Bezeichnung für die Infinitesimalrechnung) früher entdeckt, ohne sie allerdings zu veröffentlichen. Newtons Fluxionsrechnung (bereits 1665 entwickelt) war in erster Linie ein Hilfsmittel zur Berechnung der Geschwindigkeit in der Physik. Er bezeichnete beispielsweise die Ableitung nach der Zeit durch einen Punkt über der abhängigen Variablen, etwa s' =v und nannte die Ableitung Fluxion.

Tangentenproblem:

Wie berechnet man die Tangente an den Graphen einer Funktion? Dies erfolgt durch Näherung der Tangente durch Sekanten über einem endlichen, aber beliebig kleinen Intervall.

{{Grafik: Funktionsgraph mit Tangente und Sekante}}

---

infinis: lateinisch für ohne Ende, endlos

'De (Delta): griechischer Großbuchstabe für D (Differenz)

j-22

|V|: Vergleichen Sie:

Leibniz:

v(t) =('ds)/('dt)(t)

Newton:

v(t) =s'(t)

Der deutsche Mathematiker Gottfried W. Leibniz entwickelte die Differenzialrechnung ausgehend vom Tangentenproblem, der englische Physiker Isaac Newton ausgehend vom Problem der Momentangeschwindigkeit.

Leibniz argumentiert mit dem Begriff "Steigung", Newton mit dem Begriff "Geschwindigkeit".

---

Leibniz definierte das Differenzial als "unendlich kleine Größe, die kleiner als jede endliche Größe, aber doch nicht null ist". Leonhard Euler (1707 bis 1783) bezeichnete die Differenziale als "verschwindende Größen und folglich gleich null", als "Nichtse" "werdende Nullen" oder "Grenznullen".

Es dauerte fast zwei Jahrhunderte, bis diese diffusen Grundlagen durch einen exakten Aufbau der Differenzialrechnung mithilfe von Folgen und der Begriffe Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf eine mathematisch solide Basis gestellt wurden. Bedeutend waren die Arbeiten des Franzosen Louis Cauchy (1789 bis 1857) und der Deutschen Bernhard Bolzano (1781 bis 1848) und Karl Weierstraß (1815 bis 1897).

Im Jahr 1966 konnte der amerikanische Mathematiker Abraham Robinson (1900 bis 1974) in seinem Buch "Non-standard Analysis" die ursprüngliche Idee von Leibniz, das Rechnen mit "unendlich kleinen Größen", auf eine logisch einwandfreie Grundlage stellen.

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) den Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differenzialquotienten beschreiben und diese sowohl als mittlere/lokale Änderungsraten als auch als Sekanten-/ Tangentensteigung interpretieren,

-) den Differenzenquotienten auf Problemstellungen anwenden, Berechnungen durchführen und die Ergebnisse interpretieren,

-) den Begriff der Ableitungsfunktion beschreiben, diese grafisch darstellen und deren Verlauf deuten,

-) Ableitungsfunktionen zur Beschreibung von Sachverhalten aus unterschiedlichen Themengebieten einsetzen, damit lokale Änderungsraten berechnen und interpretieren,

-) mithilfe von Summen- und Faktorregel Potenz- und Polynomfunktionen ableiten.\||

---

j-23

##### Worum geht's hier?

Bisher wurden Funktionen im Hinblick auf ihren Funktionswert untersucht.

Nun soll festgestellt werden, wie sich die Änderung 'De x der unabhängigen Variablen x auf die Änderung 'De y des zugehörigen Funktionswerts y auswirkt.

##### Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit

Der freie Fall als ein Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung kann mit der Weg-Zeit-Funktion s beschrieben werden:

s(t)=2 \*t^2

t ... Fallzeit in Sekunden (s)

s(t) ... zurückgelegter Weg in Metern (m) nach t Sekunden

g ... Erdbeschleunigung; g ~~9,81 m/s^2

Für unsere Zwecke runden wir g ~~10 m/s^2.

Vereinfacht gilt: s(t) ~~5 \*t^2

|T|: Freier Fall: s(t) ~~5 \*t^2

t in s: 0

s in m: 0

t in s: 1

s in m: 5

t in s: 2

s in m: 20

t in s: 3

s in m: 45

t in s: 4

s in m: 80

t in s: 5

s in m: 125

t in s: 6

s in m: 180

a.)

Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit v eines frei fallenden Körpers im Zeitintervall [3; 5].

In diesem Zeitintervall [3; 5] legt der fallende Körper

'De s =s(5) -s(3) =125 -45 =80, also 80 m zurück.

Bezogen auf dieses Zeitintervall erhalten Sie:

Mittlere Geschwindigkeit: v^- =('De s)/('De t)

v^- =('De s)/('De t) =(s(5) -s(3))/(5 -3) =80 /2, also 40 m/s

Die mittlere Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers im Zeitintervall [3; 5] beträgt v =40 m/s.

---

b.) Ermitteln Sie die momentane Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers zum Zeitpunkt t\_0 =3 s.

Zur Berechnung wird die Zeitdifferenz 'De t verkleinert:

Intervall [3; t]: [3; 5]

Zeitdifferenz 'De t in s: 2

Wegdifferenz 'De s in m: 80

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) gegen 30: 40

---

Intervall [3; t]: [3; 4]

Zeitdifferenz 'De t in s: 1

Wegdifferenz 'De s in m: 35

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) gegen 30: 35

---

Intervall [3; t]: [3; 3,1]

Zeitdifferenz 'De t in s: 0,1

Wegdifferenz 'De s in m: 3,05

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) gegen 30: 30,05

---

Intervall [3; t]: [3; 2,01]

Zeitdifferenz 'De t in s: 0,01

Wegdifferenz 'De s in m: 0,3005

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) gegen 30: 30,05

---

Intervall [3; t]: t -> 3

Zeitdifferenz 'De t in s: 'De t -> 0

Wegdifferenz 'De s in m: 'De s -> 0

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) gegen 30: ('De s)/('De t) -> 30

---

Die mittlere Geschwindigkeit nähert sich im Intervall [3; 3 +'De t] für immer kleinere Zeitdifferenzen 'De t der Geschwindigkeit 30 m/s.

Dieser Grenzwert ist die Momentangeschwindigkeit nach t =3 Sekunden.

-----

|T|: Obwohl der Zähler 'De s und der Nenner 'De t gegen null streben, strebt ('De s)/('De t) gegen 30.

momentane Geschwindigkeit nach t =3 s

v(3) ='lim['De t -> 0](('De s)/('De t))|\_(t\_3)

---

j-24

### !!1.2.1 Der Differenzenquotient, die mittlere Änderungsrate

Gegeben sind die Funktion f mit y =f(x) und zwei x-Werte x\_0 und x\_1 =x\_0 +'De x.

Differenz der Abszissenwerte: 'De x =x\_1 -x\_0

Differenz der Funktionswerte: 'De y =f(x\_1) -f(x\_0) =f(x\_0 +'De x) -f(x\_0)

'De y heißt Änderung des Funktionswerts im Intervall [x\_0; x\_1].

Die Steigung der Sekante durch P\_0(x\_0|f(x\_0)) und P\_1(x\_1|f(x\_1)) beträgt k =('De y)/('De x).

k =('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =((f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x)

Steigung der Sekante durch die zwei Punkte P\_0(x\_0|f(x\_0)) und P\_1(x\_1|f(x\_1)) im Intervall [x\_0; x\_0 +'De x]:

k =('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =((f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x)

---

##### Definition: Differenzenquotient, mittlere Änderungsrate

||('De y)/('De x) =((f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x)

heißt Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall [x\_0; x\_0 +'De x].\||

---

{{Grafik: Passante, Sekante, Tangente}}

Passante, Sekante, Tangente

---

##### Eigenschaften Differenzenquotient, mittlere Änderungsrate

||Der Differenzenquotient im Intervall [x\_0; x\_1]

-) ist ein Quotient von Differenzen, also ein Bruch,

-) gibt die mittlere Änderung des Funktionswerts im Intervall [x\_0; x\_1] an,

-) gibt die Steigung der Sekante an, die durch die Kurvenpunkte mit den x-Werten x\_0 und x\_1 geht.\||

---

+++Beispiel 1.14: |A, B|

Mittlere Änderungsrate in einem Intervall

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f mit f(x) =(x^2)/4 im Intervall [2; 6] und zeichnen Sie den Graphen von f und die Sekante für dieses Intervall.

Lösung:

t in s: 0

s in m: 0

t in s: 1

s in m: 0,25

t in s: 2

s in m: 1

t in s: 3

s in m: 2,25

t in s: 4

s in m: 4

t in s: 5

s in m: 6,25

t in s: 6

s in m: 9

f(2) =1

f(6) =9

Änderung des x-Werts: 'De x =6 -2 =4

Änderung des Funktionswerts: 'De y =f(6) -f(2) =9 -1 =8

Mittlere Änderungsrate im Intervall [2; 6]: k =('De y)/('De x) =8/4 =2

Dieser Wert k =2 ist die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte P(2|1) und Q(6|9).

-----

j-25

+++Beispiel 1.15: |A, B, D|

Höhenwachstum einer Pflanze

Eno ist Hobbygärtner und protokolliert die Höhe einer Pflanze zu bestimmten Zeitpunkten.

Zeit t in Tagen: 0

Höhe h(t) in cm: 0

Zeit t in Tagen: 2

Höhe h(t) in cm: 1

Zeit t in Tagen: 5

Höhe h(t) in cm: 3

Zeit t in Tagen: 7

Höhe h(t) in cm: 5

Zeit t in Tagen: 14

Höhe h(t) in cm: 6

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion näherungsweise durch einen Polygonzug.

---

b) Aus seinen Messdaten ergeben sich vier Beobachtungsintervalle.

Ermitteln Sie den Höhenzuwachs 'De h in jedem der vier Beobachtungsintervalle.

Erklären Sie mithilfe der mittleren Änderungsrate ('De h)/('De t), in welchem der vier Beobachtungsintervalle die Pflanze "am schnellsten" und in welchem der vier Beobachtungsintervalle die Pflanze "am langsamsten" wächst.

---

Lösung:

a.)

Grafik siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Intervall: [0; 2}

Zeitdifferenz 'De t in Tagen: 2 -0 =2

Höhenzuwachs 'De h in cm: 1 -0 =1

Mittlere Änderungsrate ('De h)/('De t) in cm/Tag: 1/2

---

Intervall: [2; 5]

Zeitdifferenz 'De t in Tagen: 5 -2 =3

Höhenzuwachs 'De h in cm: 3 -1 =2

Mittlere Änderungsrate ('De h)/('De t) in cm/Tag: 2/3

---

Intervall: [5; 7]

Zeitdifferenz 'De t in Tagen: 7 -5 =2

Höhenzuwachs 'De h in cm: 5 -3 =2

Mittlere Änderungsrate ('De h)/('De t) in cm/Tag: 2/2 =1

---

Intervall: [7; 14]

Zeitdifferenz 'De t in Tagen: 14 -7 =7

Höhenzuwachs 'De h in cm: 6 -5 =1

Mittlere Änderungsrate ('De h)/('De t) in cm/Tag: 1/7

---

Das schnellste durchschnittliche Wachstum der Pflanze findet im Zeitraum vom 5. bis zum 7. Tag statt.

Die mittlere Änderungsrate (durchschnittlicher Höhenzuwachs) beträgt hier ('De h)/('De t) =1 cm/Tag.

Die Gerade durch die Punkte (5|3) und (7|5) hat die größte Steigung.

Am langsamsten wächst die Pflanze im Durchschnitt vom 7. bis zum 14. Tag.

Der mittlere Höhenzuwachs beträgt nur ('De h)/('De t) =1/7 cm/Tag.

Die Gerade durch die Punkte (7|5) und (14|6) hat die kleinste Steigung.

-----

+++Beispiel 1.16: |A, B|

ÖBB-Fahrplan

Gegeben ist der Fahrplan der ÖBB von Wulkaprodersdorf bis Wien Meidling.

Die angegebene Entfernung ist die Entfernung des Ortes von Wulkaprodersdorf.

{{Grafik:

Station: Wulkaprodersdorf

Entfernung: 0 km

Zeit: ab 9:56

---

Station: Müllendorf

Entfernung: 6,5 km

Zeit: an 10:00; ab 10:01

---

Station: Neufeld/Leitha

Entfernung: 14 km

Zeit: an 10:08; ab 10:10

---

Station: Ebenfurth

Entfernung: 16 km

Zeit: an 10:15; ab 10:19

---

Station: Ebreichsdorf

Entfernung: 25 km

Zeit: an 10:26; ab 10:28

---

Station: Wien Meidling

Entfernung: 52 km

Zeit: an 10:49}}

{{Grafik: Zugstrecke}}

Durchschnittliche Geschwindigkeit: v^- =('De s)/('De t)

{{Lösung auf Seite 26}}

a.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen Wulkaprodersdorf und Wien Meidling in allen angegebenen 5 Streckenabschnitten in km/h.

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen Wulkaprodersdorf und Wien Meidling in km/h für die gesamte Reisezeit zwischen Abfahrt in Wulkaprodersdorf und Ankunft in Wien Meidling.

---

j-26

Lösung:

a.)

Abschnitt: Wulkaprodersdorf- Müllendorf

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 4

Wegstrecke 'De s in km: 6,5

Mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in km/h: (6,5 km)/(4 min) =97,5 km/h

---

Abschnitt: Müllendorf - Neufeld

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 7

Wegstrecke 'De s in km: 14 -6,5 =7,5

Mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in km/h: (7,5 km)/(7 min) ~~64,3 km/h

---

Abschnitt: Neufeld - Ebenfurth

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 5

Wegstrecke 'De s in km: 16 -14 =2

Mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in km/h: (2 km)/(5 min) =24 km/h

---

Abschnitt: Ebenfurth - Ebreichsdorf

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 7

Wegstrecke 'De s in km: 25 -16 =9

Mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in km/h: (9 km)/(7 min) ~~77,1 km/h

---

Abschnitt: Ebreichsdorf - Wien Meidling

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 21

Wegstrecke 'De s in km: 52 -25 =27

Mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in km/h: (27 km)/(21 min) ~~77,1 km/h

---

b.)

v^- =(52 km)/(53 min) ~~58,9 km/h

-----

##### Übungsaufgaben

+++1.010 |A, B, C, D|

k =('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0)

k =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x)

Das Diagramm zeigt die Temperatur T in °C in Abhängigkeit von der Uhrzeit

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus dem Diagramm die Temperatur für die angegebenen Zeitpunkte t in Stunden (h) ab Mitternacht ab.

Tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.

{{Tabelle aufgelöst}}

t in h: 4

T(t) in °C: **[]**

---

t in h: 8

T(t) in °C: **[]**

---

t in h: 12

T(t) in °C: **[]**

---

t in h: 16

T(t) in °C: **[]**

---

t in h: 18

T(t) in °C: **[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur ('De T)/('De t) in °C pro h für die Zeitintervalle [4; 8], [8; 12]; [12; 16] und [16; 18].

Interpretieren Sie jeweils das Vorzeichen.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, für welches dieser Zeitintervalle die mittlere Änderungsrate wenig aussagekräftig ist.

**[]**

---

d.)

Betrachten Sie die Zwei-Stunden-Intervalle [0; 2], [2; 4] usw.

Ermitteln Sie, in welchem dieser Zeitintervalle sich die Temperatur am stärksten ändert.

Erklären Sie, wie Sie diese stärkste Temperaturänderung in der Grafik erkennen.

**[]**

-----

j-27

+++1.011 |A, B, C, D|

Das Bild in der Randspalte zeigt das Weg-Zeit-Diagramm (Weg in m, Zeit in s) eines Pkws im Stadtverkehr zwischen zwei Ampeln.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die ungleichförmige Bewegung besteht aus vier Abschnitten:

[0; 8] Anfahren

[8; 18] gleichförmige Bewegung

[18; 21] Bremsen

[21; 24] Stillstand

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit

a.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit für das Anfahren.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Bewegung.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit beim Bremsvorgang.

**[]**

---

d.)

Argumentieren Sie, ob durch diese mittleren Geschwindigkeiten der Bewegungszustand des Pkws ausreichend beschrieben werden kann.

**[]**

-----

+++1.012 |A, B|

Der EuroCity 163 hat zwischen Innsbruck und Salzburg nebenstehende Abfahrts- und Ankunftszeiten.

{{Grafik: Reisebegleiter:

Bahnhof/Haltestelle: Innsbruck Hbf

Ankunft: -

Abfahrt: 13:30

---

Bahnhof/Haltestelle: Jenbach

Ankunft: 13:49

Abfahrt: 13:50

---

Bahnhof/Haltestelle: Wörgl

Ankunft: 14:03

Abfahrt: 14:05

---

Bahnhof/Haltestelle: Kufstein

Ankunft: 14:14

Abfahrt: 14:16

---

Bahnhof/Haltestelle: Salzburg Hbf

Ankunft: 15:29

Abfahrt: -

---

Dauer: 1:59; fährt täglich 255 Tarif km}}

Entfernung von Innsbruck in km:

Innsbruck: 0

Jenbach: 35

Wörgl: 60

Kufstein: 73

Salzburg: 255

a.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des EC 163 zwischen Innsbruck und Salzburg.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittleren Geschwindigkeiten für die vier Teilstrecken zwischen Innsbruck und Salzburg.

**[]**

Auf welcher Teilstrecke hat der EC 163 die größte mittlere Geschwindigkeit?

**[]**

Auf welcher Teilstrecke hat er die kleinste mittlere Geschwindigkeit?

**[]**

-----

+++1.013 |A, B, C, D|

Frisch gebrühter Kaffee kühlt rasch ab. In der Tabelle ist die Temperatur T des Kaffees (in °C) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) seit Beginn einer Temperaturmessung angegeben.

{{Tabelle aufgelöst}}

Zeit t in Minuten: 0

Temperatur T in °C: 55,3

---

Zeit t in Minuten: 1

Temperatur T in °C: 52,2

---

Zeit t in Minuten: 10

Temperatur T in °C: 36,6

---

Zeit t in Minuten: 15

Temperatur T in °C: 32,4

---

Zeit t in Minuten: 16

Temperatur T in °C: 31,8

---

Zeit t in Minuten: 20

Temperatur T in °C: 29,6

---

Zeit t in Minuten: 25

Temperatur T in °C: 27,4

---

Zeit t in Minuten: 29

Temperatur T in °C: 26,2

---

Zeit t in Minuten: 30

Temperatur T in °C: 25,9

---

a.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur in °C pro Minute für die Zeitintervalle [0; 1], [15; 16], [29; 30], [0; 15] und [15; 30].

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsraten für die Intervalle [0; 1] und [29; 30].

**[]**

---

c.)

Erklären Sie anhand der berechneten Änderungsraten, wann sich die Temperatur des Kaffees am schnellsten ändert.

**[]**

---

j-28

+++1.014 |A, B, C, D|

Einer Gruppe von Versuchspersonen wird jeweils einmalig oral eine Dosis von 600 mg Aspirin verabreicht. Die Konzentration C des Arzneimittels Acetylsalicylsäure im Blut wird untersucht und die Abhängigkeit von der Zeit wird in der folgenden Grafik dargestellt:

{{Grafik: Grafik nicht übertragen}}

{{Tabelle aufgelöst}}

Quelle: Asian Network for Scientific Information

t in h: 0

C(t) in ('my g)/ml: 0

---

t in h: 0,5

C(t) in ('my g)/ml: 20,5

---

t in h: 1

C(t) in ('my g)/ml: 37

---

t in h: 1,5

C(t) in ('my g)/ml: 44,5

---

t in h: 2

C(t) in ('my g)/ml: 48

---

t in h: 2,5

C(t) in ('my g)/ml: 41

---

t in h: 3

C(t) in ('my g)/ml: 35

---

t in h: 4

C(t) in ('my g)/ml: 31

---

t in h: 6

C(t) in ('my g)/ml: 25

---

t in h: 8

C(t) in ('my g)/ml: 18,5

---

t in h: 10

C(t) in ('my g)/ml: 12,5

---

a.)

Lesen Sie aus der Grafik ab, wann die Konzentration des Medikamentes maximal ist. Lesen Sie die maximale Konzentration ab.

**[]**

---

b.)

Unter einer Konzentration von 15 Mg/ml wirkt das Medikament nicht mehr. Lesen Sie diesen Zeitpunkt ab.

**[]**

---

c.)

In der Tabelle in der Randspalte sind weitere Messwerte aufgelistet. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Konzentration ('De C)/('De t) für folgende Zeitintervalle in Stunden (h):

[0; 0,5], [1,5; 2], [2; 2,5] und [4; 8]

**[]**

-----

+++1.015 |B|

Gegeben ist eine Funktion f. Die Punkte A und B liegen auf dem Graphen von f.

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die mittlere Steigung des Graphen von f zwischen den Punkten A und B.

a.)

f(x) =x^2

A(1|f(1))

B(4|f(4))

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^2 -4)/(x +1)

A(1|f(1))

B(3|f(3))

**[]**

-----

+++1.016 |B|

Die Punkte A und B liegen auf dem Graphen einer Funktion f.

Ermitteln Sie den Steigungswinkel der zugehörigen Sekante.

a.)

A(1|2), B(1,5|4)

**[]**

---

b.)

A(-1|0), B(2|1,5)

**[]**

---

c.)

A(-2|3), B(2|-1)

**[]**

-----

+++1.017 |B|

Ermitteln Sie die Steigung der Sekante durch die Punkte P\_1 und P\_2 mit den x-Werten x\_1 bzw. x\_2 für die jeweilige Funktion.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und die zugehörige Sekante.

|V|: Zusammenhang zwischen

Steigung k und Steigungswinkel 'al: k ='tan('al)

a.)

f(x) =x^2

x\_1 =2

x\_2 =3

**[]**

---

b.)

f(x) =1/2 \*x^2 -2 \*x

x\_1 =0,5

x\_2 =1

**[]**

---

c.)

f(x) ='w(x)

x\_1 =1

x\_2 =2

**[]**

-----

+++1.018 |D, C|

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

k =('De y)/('De y) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =(f(x\_0 +'De y) -f(x\_0))/('De x)

a.)

Berechnen und interpretieren Sie die Sekantensteigung der Funktion mit f(x) =1/4 \*x^2 für die Intervalle [-5; -4], [-4,1; -4] und [-4,01; -4].

Beschreiben Sie, welchem Wert sich die Sekantensteigungen annähern.

**[]**

---

b.)

Berechnen und interpretieren Sie die Sekantensteigung der Funktion mit f(x) =1/8 \*x^3 für die Intervalle [2; 3], [2; 2,1], [2; 2,01] und [2; 2,001].

Beschreiben Sie, welchem Wert sich die Sekantensteigungen annähern.

**[]**

-----

+++1.019 |D, C|

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

k =('De y)/('De y) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =(f(x\_0 +'De y) -f(x\_0))/('De x)

a.)

Berechnen und interpretieren Sie die Sekantensteigung der Funktion mit f(x) ='w(x) für die Intervalle [1; 4], [1; 2], [1; 1,1] und [1; 1,01].

Beschreiben Sie, welchem Wert sich die Sekantensteigungen annähern.

**[]**

---

b.)

Berechnen und interpretieren Sie die Sekantensteigung der Funktion mit f(x) =1/x für die Intervalle [1; 4], [1; 2], [1; 1,1] und [1; 1,01].

Beschreiben Sie, welchem Wert sich die Sekantensteigungen annähern.

**[]**

-----

j-29

### !!1.2.2 Der Differenzialquotient, die lokale Änderungsrate

Der Differenzenquozient k =('De y)/('De y) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) gibt die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall [x\_0; x\_1] an.

Grafisch bedeutet der Differenzenquotient die Steigung der Sekante durch die zwei Punkte P\_0(x\_0|f(x\_0)) und im Intervall [x\_0; x\_0 +'De x].

Um die lokale oder momentane Änderungsrate einer Funktion f an einer Stelle x\_0 zu erhalten, müssen Sie das Intervall [x\_0; x\_1] des Differenzenquotienten verkleinern.

Sie lassen "x\_1 gegen x\_0 gehen"; x\_1 -> x\_0

Dadurch strebt die Folge der Werte von 'De x =x\_1 -x\_0 gegen null; 'De x -> 0

Existiert für jede Folge von 'De x, die gegen null strebt, derselbe Grenzwert von 'De x, dann heißt dieser Grenzwert Differenzialquotient von f an der Stelle x\_0.

Grafisch bedeutet dies den Übergang von der Sekantensteigung hin zur Steigung der Tangente an die Funktion.

{{Grafik: Funktionsgraph mit Tangente und Sekante}}

##### Definition: Differenzialquotient

||Der Grenzwert 'lim['De x -> 0]((f(x\_0 +'De y) -f(x\_0))/('De x)) =f'(x\_0) heißt, falls dieser Grenzwert existiert,

-) Differenzialquotient oder

-) lokale Änderungsrate oder

-) Ableitung

der Funktion f an der Stelle x\_0 'el D.

Wenn der Differenzialquotient f'(x\_0) existiert, heißt die Funktion f differenzierbar an der Stelle x\_0.\||

---

Es gibt verschiedene gleichwertige Schreibweisen für den Differenzialquotienten:

f'(x\_0) =('df)/('dx)|\_(x =x\_0) =('df)/('dx)|\_(x\_0) =(('df)/('dx))\_(x =x\_0)

('dy)/('dx)|\_(x =x\_0) =('dy)/('dx)|\_(x\_0) =('dy)/('dx)(x\_0)

Anmerkung: Zum Zeichen des vollzogenen Grenzübergangs ersetzt man im Differenzenquotient den Buchstaben 'De durch 'd.

Aus der Differenz 'De x wird das Differenzial 'dx.

Aus der Differenz 'De y wird das Differenzial 'dy.

'lim['De x -> 0](('De y)/('De x)|\_(x =x\_0)) =('dy)/('dx)|\_(x =x\_0)

Trotz des Namens Differenzialquotient handelt es sich nicht um einen Quotienten, sondern um einen Grenzwert.

Es wäre somit falsch, durch 'd kürzen zu wollen.

---

|T|: Schreib- und Sprechweisen für den Differenzialquotienten:

f' sprich: f Strich

('df)/('dx) sprich: 'df nach 'dx

f'(x\_0) sprich: f Strich an der Stelle x\_0

('df)/('dx)|\_(x =x\_0) =('df)/('dx)|\_(x\_0) sprich: 'df nach 'dx an der Stelle x\_0

y' sprich Ypsilon Strich

('dy)/('dx) sprich dy nach 'dx

('dy)/('dx)|\_(x =x\_0) =('dy)/('dx)|\_(x\_0) sprich: 'dy nach 'dx an der Stelle x\_0

---

##### Eigenschaften des Differenzialquotienten

||Der Differenzialquotient an der Stelle x\_0 r ist der Grenzwert des Differenzenquotienten, r gibt die Änderung des Funktionswertes an der Stelle x\_0 an und r gibt die Steigung der Tangente an dieser Stelle x\_0 an. \||

---

Differenzenquotient: Steigung der Sekante im Intervall [x\_0; x\_1]

Differenzialquotient: Steigung der Tangente an der Stelle x\_0

j-30

##### Definition: Ableitungsfunktion

||Eine Funktion f', die jedem x0 aus der Definitionsmenge D der Funktion f die Ableitung f'(x0) zuordnet, heißt Ableitungsfunktion der Funktion f.\||

---

##### Näherungsberechnungen mithilfe der Ableitungsfunktion

||Für 'De x =1 gilt: f'(x\_0) ~~((f(x\_0 +1)-f(x\_0))/1, daraus folgt f(x\_0 +1) ~~f(x\_0) +f'(x\_0)\||

---

+++Beispiel 1.17: |A, B|

Lokale Änderungsrate an der Stelle

Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion f mit f(x) =(x^2)/4 an der Stelle x\_0 =2 mithilfe einer geeigneten Folge von Differenzenquotienten.

{{Lösung auf Seite 30 und 31}}

|!|: Obwohl der Zähler 'De y und der Nenner 'De x des Differenzenquotienten ('De y)/('De x) gegen null streben, strebt die Folge der Differenzenquotienten gegen 1.

Lösung:

{{Tabelle aufgelöst}}

Intervall [x\_0; x]: [2; 6]

'De x =x -x\_0: 4

'De x =f(x) -f(x\_0): 8

Differenzquotient ('De y)/('De x): 2

---

Intervall [x\_0; x]: [2; 4]

'De x =x -x\_0: 2

'De x =f(x) -f(x\_0): 3

Differenzquotient ('De y)/('De x): 1,5

---

Intervall [x\_0; x]: [2; 3]

'De x =x -x\_0: 1

'De x =f(x) -f(x\_0): 1,25

Differenzquotient ('De y)/('De x): 1,25

---

Intervall [x\_0; x]: [2, 2,1]

'De x =x -x\_0: 0,1

'De x =f(x) -f(x\_0): 0,1025

Differenzquotient ('De y)/('De x): 1,025

---

Intervall [x\_0; x]: [2; 2,01]

'De x =x -x\_0: 0,01

'De x =f(x) -f(x\_0): 0,010025

Differenzquotient ('De y)/('De x): 1,0025

---

Intervall [x\_0; x]: [2; 2,001]

'De x =x -x\_0: 0,001

'De x =f(x) -f(x\_0): 0,00100025

Differenzquotient ('De y)/('De x): 1,00025

---

Intervall [x\_0; x]: ...

'De x =x -x\_0: ...

'De x =f(x) -f(x\_0): ...

Differenzquotient ('De y)/('De x): ...

---

Intervall [x\_0; x]: x -> x\_0

'De x =x -x\_0: 'De x -> 0

'De x =f(x) -f(x\_0): 'De y -> 0

Differenzquotient ('De y)/('De x): ('De y)/('De x) -> 1

---

|!|: Aus der Steigung der Sekante (Differenzenquotient) wird durch Grenzübergang die Steigung der Tangente (Differenzialquotient).

Geometrische Interpretation:

Strebt 'De x gegen null, so ergibt sich z. B. eine Folge von Punkten Q\_1(6|9), Q\_2(4|4), Q\_3(3|2,25), ..., die sich immer mehr dem Punkt P(2|1) nähern.

Entsprechend nähert sich die Folge der zugehörigen Sekanten s\_1, s\_2, s\_3, ... der Tangente im Punkt P. Die Sekanten "drehen" sich in die Tangente.

-) Nach dem vollzogenen Grenzübergang 'De x -> 0 erhalten Sie als Grenzwert der Sekantensteigungen die Tangentensteigung.

-) Die Steigung der Tangente ist die Steigung der Funktion in P.

Ermitteln Sie algebraisch den Differenzenquotienten und die Steigung der Tangente an der Stelle 2 und allgemein an der Stelle x\_0.

An der Stelle x\_0 =2

für das Intervall [2; 2 +'De x]:

('De y)/('De x) =(f(2 +'De x) -f(2))/('De x) =(1/4 \*(2 +'De x)^2 -1)/('De x) =(1 +'De x +1/4 \*('De x)^2 -1)/('De x) =('De x \*(1 +1/4 \*'De x))/('De x) =1 +1/4 \*'De x

An einer beliebigen Stelle x\_0

für ein beliebiges Intervall [x\_0; x\_0 +'De x]:

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =(1/4 \*(x\_0 +'De x)^2 -1/4 \*x\_0^2)/('De x) =(1/4 \*x\_0^2 +1/2 \*x\_0 \*'De x +1/4 \*('De x)^2 -1/4 \*x\_0^2)/('De x) =('De x \*(1/2 \*x\_0 +1/4 \*'De x))/('De x) =1/2 \*x\_0 +1/4 \*De x

j-31

Den Differenzialquotienten erhalten Sie durch den Grenzübergang 'De x -> 0 an der beliebigen Stelle x\_0:

an der Stelle x-0 =2:

f'(2) ='lim['De x ->](1 +1/4 \*'De x) =1

Schreibweisen: ('df)/('dx)|\_(x =2) =('df)/('dx)|\_2 =f'(2) =1

an der beliebigen Stelle x\_0:

f'(x\_0) ='lim['De x -> 0]((1/2 \*x\_0 +1/4 \*'De x) =1/2 \*x\_0

Die Funktion f' mit f'(x) =1/2 \*x heißt Ableitungsfunktion von f.

Ist die Funktion an einer Stelle differenzierbar, so lässt sich die Funktion "in der Nähe" dieser Stelle durch die Tangente annähern.

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

Berechnung des numerischen Differenzialquotienten mit dem GTR:

{{Grafik: Eingaben und Ausgaben des GTR}}

-----

+++Beispiel 1.18: |B|

Sekantensteigung und Tangentensteigung

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) =2 \*x^2 -3 \*x +3.

a.)

Berechnen Sie den Differenzenquotienten im Intervall [x\_0; x\_0 +'De x].

---

b.)

Berechnen Sie die Steigung der Sekante (mittlere Änderungsrate) durch die Punkte A(1|y\_1) und B(3|y\_2) auf 2 Arten.

---

c.)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente (lokale Änderungsrate, Ableitung) im Punkt A(1|y\_1).

---

d.)

Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion.

---

e.)

Stellen Sie die Funktion f, die berechnete Sekante sowie die Tangente in A in einem Koordinatensystem dar.

---

Lösung:

a.)

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =(2 \*(x\_0 +'De x)^2 -3 \*(x\_0 +'De x) +3 -2 \*x\_0^2 +3 \*x\_0 -3)/('De x) =(2 \*x\_0^2 +4 \*x\_0 \*'De x +2 \*('De x)^2 -3 \*x\_0 -3 \*'De x +3 -3 \*x\_0^2 +3 \*x\_0 -3)/('De) =(4 \*x\_0 \*'De x +2 \*('De x)^2 -3 \*'De x)/('De x) =('De x \*(4 \*x\_0 +2 \*'De x -3))/(\*De x) =4 \*x\_0 +2 \*'De x -3

('De y)/('De x) =4 \*x\_0 +2 \*'De x -3

---

b.)

Berechnung mit der Formel des Differenzenquotienten:

k = ('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0)/(x\_1 -x\_0) =(f(3) -f(1))/(3 -1) =((18 -9 +3) -(2 -3 +3))/2 =10/2 =5

Berechnung mit dem Ergebnis aus Teil a.):

k =('De y)/('De x) =4 \*x\_0 +3 \*'De x -3 =4 \*1 +2 \*2 -3 =5

Die Steigung der Sekante ist 5.

---

c.)

f'(x\_0) ='lim['De x -> 0](4 \*x\_0 +2 \*'De x -3) =4 \*x\_0 -3

f'(1) =4 \*1 -3 =1

---

d.)

Die Gleichung der Ableitungsfunktion f' von f lautet:

f'(x) =4 \*x -3.

---

e.)

siehe Randspalte.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

j-32

##### Definition: Tangente

||Eine Gerade heißt Tangente eines Funktionsgraphen im Punkt P(x\_0|y\_0) genau dann, wenn sie sowohl

-) durch den Punkt P geht als auch

-) die Steigung k =f'(x\_0) hat.

('df)/('dx)|\_(x\_0) =f'(x\_0) ='tan('al) =k

-) die Steigung f'(x\_0) dieser Tangente heißt Steigung der Funktion f an der Stelle x\_0.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph mit Tangente und Sekante}}

Der Differenzialquotient, die lokale Änderungsrate f'(x\_0) gibt geometrisch die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x\_0 an.

##### Gleichung der Tangente

||y =f'(x\_0) \*(x -x\_0) +y\_0 ist die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P(x\_0|y\_0).\||

---

|!|: f(x\_0 +1) ~~f(x\_0) +f'(x\_0)

Begründung:

Geradengleichung in Hauptform:

y =k \*x +d

Für die Steigung k im Punkt P(x\_0|y\_0) gilt:

k =f'(x\_0)

y =f'(x\_0) \*x +d

Zur Berechnung des y-Achsenabschnittes d werden die Koordinaten des Punktes P in die Geradengleichung eingesetzt:

y\_0 =f'(x\_0) \*x\_0 +d

Auflösen nach d:

d =y\_0 -f'(x\_0) \*x\_0

Einsetzen von d in die Geradengleichung:

y =f'(x\_0) \*x +y\_0 -f'(x\_0) \*x\_0

Umstellen und Herausheben von f'(x\_0) ergibt die Gleichung der Tangente:

y =f'(x\_0) \*(x -x\_0) +y\_0

+++Beispiel 1.19: |B|

Tangentengleichung

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t, die den Graphen der Funktion f mit f(x) =x^2 -1 an der Stelle x\_0 =2 berührt.

Lösung:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Gleichung der Tangente t im Punkt P(2|3) lautet t: y =4 \*x -5.

Berechnung des Berührpunktes P(2|y\_0): y\_0 =f(2) =2^2 -1 =3 Somit hat der Berührpunkt P die Koordinaten: P(2|3)

Berechnung der Steigung der Funktion f an der Stelle x\_0 =2.

Differenzenquotient:

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'de x) -f(x\_0))/('De x) =((x\_0 +'De x)^2 -1 -x\_0^2 +1)/('De x) =(x\_0^2 +2 \*x\_0 \*'De +('De x)^2 -1 -x\_0^2 +1)/('De x) =(2 \*x\_0 \*'De x +('De x)^2)/('De x) =('De x \*(2 \*x\_0 +'De x)/('De x) =2 \*x\_0 +'De x

Differenzialquotient:

f'(x\_0) ='lim['De x -> 0](2 \*x\_0 +'De x) =2 \*x\_0

Es gilt: k =f'(x\_0) =f'(2) =4

Die Steigung der Tangente an die Funktion an der Stelle x\_0 =2 ist gleich der Steigung der Funktion an dieser Stelle: k =4

Die Gleichung der Ableitungsfunktion f' lautet: f'(x) =2 \*x Tangentengleichung: y =4 \*(x -2) +3 =4 \*x -8 +3 =4 \*x -5

-----

j-33

##### Steigung der Tangente - Steigung der Funktion

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

||f'(x\_0) > 0 bedeutet, dass die Tangente an f an der Stelle x\_0 steigt.

f'(x\_0) < 0 bedeutet, dass die Tangente an f an der Stelle x\_0 fällt.

f'(x\_0) =0 bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle x0 eine waagrechte Tangente hat.\||

---

##### Definition: Ableitung einer Funktion

||Die (erste) Ableitung einer Funktion f mit y =f(x) ist diejenige Funktion f', die jeder

Stelle ihrer Definitionsmenge den zugehörigen Differenzialquotienten zuordnet.

f'(x) ='lim['De x -> 0](f(x +'De x) -f(x))/('De x)

Differenzieren bedeutet umgangssprachlich das Aufsuchen der Ableitung einer Funktion. Die Definitionsmenge der Ableitung muss jeweils ermittelt werden.\||

---

+++Beispiel 1.20: |A, B, D|

Geometrische Interpretation der ersten Ableitung

a.)

Ermitteln Sie grafisch die erste Ableitung der Funktion f mit f(x) =(x^2)/2.

---

b.)

Überprüfen Sie die Übereinstimmung mit der berechneten Ableitungsfunktion f'(x) =1/2 \*x an einzelnen Stellen.

---

Lösung:

{{Grafik: Grafisches Differenzieren}}

|T|: Der Wert der Ableitung ist ein Maß dafür, wie stark sich eine Funktion an einer Stelle x ändert.

a.)

Die Ableitung f' ist jene Funktion, die der Funktion f an jeder Stelle die Tangentensteigung zuordnet.

Zeichnen Sie daher an (beliebig vielen) ausgewählten Punkten der Funktion f Tangenten und die zugehörigen Steigungsdreiecke.

Lesen Sie aus den gezeichneten Steigungsdreiecken die jeweilige Steigung k ab. Die abgelesene Steigung k ist der Funktionswert der Ableitungsfunktion an der entsprechenden Stelle.

Zeichnen Sie den jeweils abgelesenen Wert k als y-Wert an der entsprechenden Stelle x in ein neues Koordinatensystem und verbinden Sie die einzelnen gezeichneten Punkte.

Die gezeichnete Kurve entspricht (näherungsweise) dem Funktionsgraphen der Ableitungsfunktion f'.

---

b.)

Überprüfen der Funktionswerte:

Die Tangentensteigung von f(x) =1/4 \*x^2

an der Stelle x =-4 beträgt f'(-4) =1/2 \*(-4) =-2,

der Graph von f fällt bei x =-4.

an der Stelle x =-2 beträgt f'(-2) =1/2 \*(-2) =-1,

der Graph von f fällt bei x =-2.

an der Stelle x =0 beträgt f'(0) =1/2 \*0 =0,

waagrechte Tangente bei x =0.

an der Stelle x =2 beträgt f'(2) =1/2 \*2 =1,

der Graph von f steigt bei x =2.

Die gezeichnete Gerade stimmt mit dem Graphen der Ableitungsfunktion f' überein.

-----

j-34

-) Der Differenzenquotient ist ein Bruch.

-) Der Differenzialquotient ist ein Grenzwert.

-) Die erste Ableitung ist eine Funktion.

##### Zusammenfassende Merkregel

||Der Differenzenquotient ist ein Quotient (d. h. ein Bruch) von Differenzen.

Er bedeutet geometrisch die Steigung der Sekante.

Der Differenzialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten.

Er bedeutet geometrisch die Steigung der Tangente.

Die erste Ableitung ist eine Funktion, die jeder Stelle den entsprechenden Differenzialquotienten zuordnet.\||

---

##### Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x\_0

||Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle x\_0, wenn der Differenzialquotient f'(x\_0) ='lim['De x -> x\_0](f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) existiert.

Zu beachten ist, dass x eine beliebige Nullfolge durchlaufen kann, wobei sich stets derselbe Grenzwert - bei Annäherung von links und von rechts - für f(x\_0) bzw. f'(x\_0) ergeben muss.

Die Funktion f ist differenzierbar an der Stelle x\_0, wenn sie an dieser Stelle x\_0 stetig ist und an dieser Stelle keinen "Knick" aufweist.

{{Grafik: Funktionsgraph stetig differenzierbar}}

{{Grafik: Funktionsgraph stetig nicht differenzierbar}}

{{Grafik: Funktionsgraph Pol nicht differenzierbar}}

Ist eine Funktion f an einer Stelle x\_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.

Ist eine Funktion f an einer Stelle x\_0 stetig, muss sie dort nicht differenzierbar sein.

Ist eine Funktion f an einer Stelle x\_0 unstetig, dann ist sie dort auch nicht differenzierbar.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion y =|x -2| ist an der Stelle x =\_2 stetig, aber dort nicht differenzierbar.

---

+++Beispiel 1.21: |B, C|

Differenzierbarkeit der Betragsfunktion

Untersuchen Sie die stetige Betragsfunktion f mit f(x) =|x| an der Stelle x\_0 =0 in Bezug auf die Differenzierbarkeit.

{{Lösung auf Seite 34 und 35}}

Lösung:

Dazu wird zunächst der Differenzenquotient für das Intervall [0; 0 +x] berechnet:

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =(|x\_0 +De x| +|0|)/('De x) =(|'De x|)/('De x)

(|'De x|)/('De x) ={[+1 für 'De x >0] [-1 für 'De x <0]

Daher folgt:

'lim[x -> 0^-]((|'De x|)/('De x)) =-1 und

'lim[x -> 0^+]((|'De x|)/('De x)) =1

Der Grenzwert 'lim['De x] an der Stelle x =0 existiert somit nicht.

Die Betragsfunktion ist an der Stelle x\_0 =0 nicht differenzierbar.

Anschaulich erhalten Sie bei Annäherung von rechts eine Tangente mit der Steigung k =1, bei Annäherung von links eine Tangente mit der Steigung k =-1.

Die Betragsfunktion lässt sich an der Stelle x\_0 =0 nicht "linearisieren".

Sie hat an dieser Stelle einen "Knick", der erhalten bleibt, auch wenn Sie noch so tief "hineinzoomen".

j-35

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

Für x > 0 ist die Steigung der Funktion 1.

Für x < 0 ist die Steigung der Funktion -1.

-----

##### Übungsaufgaben

Di Funktion f mit f(x) =1/(x^2 -1)

|!|: Beachten Sie:

Die Differenzierbarkeit einer Funktion muss rechnerisch überprüft werden, durch "Hinschauen" auf den Graphen kann oft nicht entschieden werden, ob eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist.

---

+++1.020 |B|

Berechnen Sie den Differenzialquotienten an der Stelle x\_0 mithilfe der Definition f'(x\_0) ='lim['De x -> 0]((f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x)).

Überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie den Graphen der Funktion und die zugehörige Tangente zeichnen.

Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion.

a.)

f(x) =x^2 -4

x\_0 =1

**[]**

---

b.)

f(x) =3x^2 -2x +1

x\_0 =1

**[]**

---

c.)

f(x) =1/x

x\_0 =-2

**[]**

-----

+++1.021 |B, D|

Begründen Sie, an welcher(n) Stelle(n) die folgenden Funktionen nicht differenzierbar sind.

a.)

f(x) =|x +2|

**[]**

---

b.)

f(x) =1/x

**[]**

---

c.)

f(x) =|x^2 -4|

**[]**

---

d.)

f(x) =1/(x^2 -1)

**[]**

-----

+++1.022 |A|

Geben Sie mit einem Haken an, ob die Funktion an den Stellen x\_1 bis x\_6 stetig und vermutlich differenzierbar ist.

{{Schreiben Sie ein X in die Eingabemarke}}

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x\_1:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_2:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_3:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_4:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_5:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_6:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x\_1:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_2:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_3:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_4:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_5:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

x\_6:

stetig: **[]**

differenzierbar: **[]**

-----

j-36

+++1.023 |B, D|

|D|: Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben 1.024 und 1.025 in Partnerarbeit. Argumentieren und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle x0 differenzierbar sind, indem Sie mit einem technologischen Hilfsmittel in den Graphen der Funktion bei x\_0 "hineinzoomen".

a.)

f(x) =|x^2 -1|

x\_0 =1

**[]**

---

b.)

f(x) ='w[3](x^2 +0,001)

x\_0 =0

**[]**

---

c.)

f(x) ='w[3](x^2 -0,01)

x\_0 =0

**[]**

---

d.)

f(x) ='w[3](|x|)

x\_0 =0

**[]**

---

e.)

f(x) =x +|x| +1

x\_0 =0

**[]**

---

f.)

f(x) =(x +|x|)^2 +1

x\_0 =0

**[]**

---

g.)

f(x) =x \*|x| +1

x\_0 =1

**[]**

---

h.)

f(x) =(x -1)^2 \*|x|

x\_0 =0 und x\_0 =1

**[]**

-----

|D|: Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben 1.024 und 1.025 in Partnerarbeit. Argumentieren und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Funktion: steigt; Steigung: positiv

Funktion: fällt; Steigung: negativ

---

+++1.024 |C, D|

|D|: Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben 1.024 und 1.025 in Partnerarbeit. Argumentieren und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Interpretieren Sie jeweils die Steigung und ordnen Sie die Punkte A bis E auf dem Graphen den entsprechenden Steigungen zu:

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Steigung: -2; Punkt: **[]**

Steigung: -1; Punkt: **[]**

Steigung: 0; Punkt: **[]**

Steigung: 1; Punkt: **[]**

Steigung: 2; Punkt: **[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Steigung: -2; Punkt: **[]**

Steigung: -1; Punkt: **[]**

Steigung: 0; Punkt: **[]**

Steigung: 1; Punkt: **[]**

Steigung: 2; Punkt: **[]**

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Steigung: -2; Punkt: **[]**

Steigung: -1; Punkt: **[]**

Steigung: 0; Punkt: **[]**

Steigung: 1; Punkt: **[]**

Steigung: 2; Punkt: **[]**

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Steigung: -2; Punkt: **[]**

Steigung: -1; Punkt: **[]**

Steigung: 0; Punkt: **[]**

Steigung: 1; Punkt: **[]**

Steigung: 2; Punkt: **[]**

-----

+++1.025 |C, D|

|D|: Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben 1.024 und 1.025 in Partnerarbeit. Argumentieren und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Ordnen Sie den x-Werten die Steigungen -4, -1, 0, 2 und 3 zu:

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x: -2; Steigung: **[]**

x: -1; Steigung: **[]**

x: 0; Steigung: **[]**

x: 1; Steigung: **[]**

x: 2; Steigung: **[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x: -2; Steigung: **[]**

x: -1; Steigung: **[]**

x: 0; Steigung: **[]**

x: 1; Steigung: **[]**

x: 2; Steigung: **[]**

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x: -2; Steigung: **[]**

x: -1; Steigung: **[]**

x: 0; Steigung: **[]**

x: 1; Steigung: **[]**

x: 2; Steigung: **[]**

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x: -2; Steigung: **[]**

x: -1; Steigung: **[]**

x: 0; Steigung: **[]**

x: 1; Steigung: **[]**

x: 2; Steigung: **[]**

-----

j-37

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Indem man die Steigung k einer Funktion f an beliebig vielen Stellen (hier 3 Stellen) einzeichnet, gewinnt man punktweise den Graphen der ersten Ableitung f' der Funktion f. Extremstellen von f werden zu Nullstellen von f'.

---

+++1.026 |B|

Skizzieren Sie unter dem Graphen von f nach der in der Randspalte B beschriebenen Methode die erste Ableitung durch grafisches Differenzieren.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

-----

j-38

## !!1.3 Ableitung wichtiger Grundfunktionen

Die Berechnung der Ableitungsfunktion mithilfe des Differenzenquotienten ist mühsam und zeitaufwändig. Mit einigen einfachen Regeln lassen sich Ableitungsfunktionen ohne großen Aufwand berechnen.

##### Ableitung der konstanten Funktion

||Ist f eine Funktion mit einem konstanten Wert c, dann ist die Ableitungsfunktion gleich null.

f(x) =c

f'(x) =0

c 'el 'R\||

---

Der Graph einer konstanten Funktion ist eine Parallele zur x-Achse. Sie besitzt die Steigung null.

Jede Konstante ergibt differenziert null.

(c)‘ =0

---

+++Beispiel 1.22: |B|

Konstante Temperatur

Im Klassenzimmer der 4 AK herrscht konstant die Temperatur 20° C.

Die Änderungsrate der Temperatur ist null.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

##### Ableitung der Potenzfunktion

+++Beispiel 1.23: |B|

Ableitung der quadratischen Funktion

Berechnen Sie die erste Ableitung der quadratischen Funktion f mit f(x) =x^2.

(x^2)' =2 \*x

Lösung:

('De y)/('De x) =(f(x +'De x) -f(x))/('De x) =((x +'De x)^2 -x^2)/('De x) =(x^2 +2x \*'De x +('De x)^2 -x^2)/('De x) =('De x \*(2x +'De x))/('De x) =2x +'De x

f'(x) ='lim['De x -> 0](2x +'De x) =2x

Ableitungsfunktion: f'(x) =2x oder kurz (x^2)' =2x

-----

+++Beispiel 1.24: |B|

Ableitung der kubischen Funktion

Berechnen Sie die erste Ableitung der kubischen Funktion f mit f(x) =x^3.

Lösung:

('De y)/('De x) =(f(x +'De x) -f(x))/('De x) =((x +'De x)^3 -x^3)/('De x) =(x^3 +3x^2 \*'De x +3x \*('De x)^2 +('De x)^3 -x^3)/('De x) =('De x \*(3x^2 +3x \*'De x +('De x)^2))/('De x) =3x^2 +3x \*'De x +('De x)^2

f'(x) =lim['De x -> 0](3x^2 +3x \*'De x +('De x)^2) =3x^2

Ableitungsfunktion: f'(x) =3x^2 oder (x^3)' =3x^2

-----

Setzt man die Berechnungen für höhere Potenzen fort, erhält man:

f(x) =x^2

f'(x) =2 \*x

f(x) =x^3

f'(x) =3 \*x^2

f(x) =x^4

f'(x) =4 \*x^3

f(x) =x^5

f'(x) =5 \*x4

...

f(x) =x^(27)

f'(x) =27 \*x^(26)

Daraus lässt sich einfach eine allgemeine Ableitungsregel vermuten

f(x) =x^n

f'(x) =n \*x^(n -1)

---

{{Grafik: CAS}}

(x^2)' =2 \*x

(x^3)' =3 \*x^2

(x^4)' =4 \*x^3

(x^5)' =5 \*x^4

...

(x^(27))' =27 \*x^(26)

---

j-39

Zur Begründung wird eine binomische Formel verwendet:

a^n -b^n =(a -b) \*(a^(n -1) +a^(n -2) \*b +... +b^(n -1)).

('De y)('De x) =(f(x +'De x) -f(x))/('De x) =((x +'De x)^n -x^n)/('De x) =((x +'De x -x) \*[(x +'De x)^(n -1) +(x +'De x)^(n -2) \*x +... +x^(n -1)])/('De x) =(x +'De x)^(n -1) +(x +'De x)^(n -2) \*x +... +x^(n -1)

f'(x) ='lim['De x -> 'ue]((x +'De x)^(n -1) +(x +'De x)^(n -2) \*x +... +x^(n -1)) =n \*x^(n -1)

---

Man kann beweisen, dass die Potenzregel nicht nur für natürliche Exponenten n >=2, sondern auch für beliebige reelle Exponenten gilt.

(xn)' =n \*xn -1

---

##### Ableitung der Potenzfunktion - Potenzregel

||f(x) =x^n

f'(x) =n \*x^(n -1)

(x^n)' =n \*x^(n -1)\||

---

##### Faktorregel

||Ist u eine differenzierbare Funktion und c eine Konstante, dann gilt:

f(x) =c \*u(x)

f'(x) =c \*u'(x)

mit c 'el 'R

(c \*u)' =c \*u'; c 'el 'R\||

---

Ein konstanter Faktor c bleibt beim Differenzieren erhalten.

Begründung:

f'(x) ='lim['De x -> 0]((c \*u(x +'De x) -c \*u(x))/('De x) ='lim['De x -> 0](c \*(u(x +'de s) -u(x))/('De x) =c \*'lim['De x -> 0](u(x +'De x) -u(x))/('De x) =c \*u'(x)

+++Beispiel 1.25: |B|

Faktorregel

2, 7, 'w(3) und 'pi^4 sind reelle Zahlen.

a.)

f(x) =2 \*x^2

f'(x) =2 \*2 \*x =4 \*x

kurz: (2 \*x^2)' =4 \*x

---

b.)

f(x) =7 \*x^(12)

f(x) =7 \*12 \*x^(11) =84 \*x^(11)

kurz: (7 \*x^(12))' =84 \*x^(11)

---

c.)

f(x) ='w(3) \*x^5

f'(x) ='w(3) \*5 \*x^4

kurz: ('w(3) \*x^5)' ='w(3) \*5 \*x^4

---

d.)

f(x) ='pi^4 \*x^4

f'(x) ='pi^4 \*4 \*x^3

kurz: 'pi^4 \*4 \*x^3

-----

##### Summenregel

||Sind u und v differenzierbare Funktionen, dann sind auch die Summe und die Differenz der beiden Funktionen differenzierbar und es gilt:

f(x) =u(x) +-v(x)

f'(x) =u'(x) +-v'(x)

(u +-v)' =u' +-v'\||

---

Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen. Begründung:

f'(x) ='lim['De x -> 0]([u(x +'De x) +v(x 'De x)] -[u(x) -v(x)])/('De x) ='lim['De x -> 0]((u(x +'De x -u(x))/('De x) +(v(x +'De x) -v(x))/('De x)) ='lim['De x -> 0]((u(x +'De x) -u(x))/('De x))) +'lim['De x -> 0]((v(x +'De x) -v(x))/('De x)) =u'(x) +v'(x)

---

j-40

+++Beispiel 1.26: |B|

Summenregel

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =x^2 +x^5

f'(x) =2 \*x +5 \*x^4

---

b.)

f(x) =5 \*x^3 -7 \*x^2 +4 \*x -3

f'(x) =5 \*3 \*x^2 -7 \*2 \*x +4 -0 =15 \*x^2 -14 \*x +4

---

c.)

f(x) =4 \*x^7 -3 \*x^3 +3

f'(x) =4 \*7 \*x^6 -3 \*3 \*x^2 =28 \*x^6 -9 \*x^2

---

d.)

f(x) ='w(2) \*x^6 +'pi \*x^6 -3 \*x +1

f'(x) ='w(2) \*6 \*x^5 +'pi \*6 \*x^5 -3

---

e.)

f(x) =3/7 \*x^7 -5 \*x^5 -1/2 \*x +sin(30)

f'(x) =3 \*x^6 -25 \*x^4 -1/2

-----

||Beachten Sie:

Ein konstanter Summand fällt beim Differenzieren weg.

f(x) =u(x) +c; c 'el 'R

f'(x) =u'(x) +0 =u'(x)

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

f(x) =c \*u(x); c 'el 'R

f'(x) =c \*u'(x)\||

---

(3 +x^2)' =0 +2x =2x

(3 \*x^2)' =3 \*2x =6x

---

+++Beispiel 1.27: |B|

Ableitung der linearen Funktion

f(x) =k \*x +d

k und d sind konstante, reelle Zahlen

f'(x) =(k \*x +d)' =k

-----

Die lineare Funktion y =k \*x +d hat an jeder Stelle die Steigung k. Daher ist ihre erste Ableitungsfunktion die konstante Funktion k.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

k ='tan('al)

+++Beispiel 1.28: |B, C, D|

Sekanten- u. Tangentensteigung einer quadrat. Funktion

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) =-x^2 +4 \*x +2.

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [-2; 6] und die Sekante für das Intervall [1; 4].

Messen und berechnen Sie die Steigung dieser Sekante.

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate (Sekantensteigung) für das Intervall [1; 1,1].

---

c.)

Zeichnen Sie die Tangente an der Stelle x =1.

Messen und berechnen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x =1.

Messen und berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente.

---

d.)

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P(1|5).

---

e.)

Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Funktion f die Steigung 1 hat.

---

f.)

Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Funktion eine waagrechte Tangente hat.

---

{{Lösung auf Seite 40 und 41}}

Lösung:

a) Zeichnung: siehe Randspalte

f(1) =5;

f(4) =2,

d. h., die Sekante geht durch die Punkte P(1|5) und Q(4|2).

Sekantensteigung im Intervall [1; 4]:

k =('De y)/('De x) =(f(4) -f(1))/(4 -1) =(2 -5)/(4 -1) =(-3)/3 =-1

---

b.)

f(1) =5;

f(1,1) =5,19

mittlere Änderungsrate

k =('De y)/('De x) =(f(1,1) -f(1))/(1,1 -1) =(5,19 -5)/(1,1 -1) =(0,19)/(0,1) =1,9

---

j-41

c.)

Die Tangentensteigung berechnen Sie mithilfe der Ableitung an der Stelle x =1:

f'(x) =-2 \*x +4

k =f'(1) =-2 \*1 +4 =2

Tangentensteigung k =2

Die Steigung der Tangente k =2 ist die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x =1.

Für den Steigungswinkel 'al gilt:

'tan('al) =k und 'al ='tan^(-1)(k)

'tan('al) =2 <--> 'al ='tan^(-1)(2) ~~63,4 °C

---

d.)

Setzen Sie die Koordinaten des Punktes P(1|5) und die Steigung k =2 in die Geradengleichung y =k \*x +d ein, können Sie den Achsenabschnitt d der Tangentengleichung berechnen:

t: y =k \*x +d

5 =2 \*1 +d <--> d =3

t: y =2x +3

Tangentengleichung

---

e.)

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 1 hat. Somit ist die Gleichung f'(x) =1 zu lösen.

f'(x) =-2 \*x +4

k =f'(x) =1; x =?

-2 \*x +4 =1

2 \*x =3

x =1,5

Die Funktion f hat an der Stelle x =1,5 die Steigung 1.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ableitungsfunktion f' mit der Funktion y =1 (siehe Randspalte).

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

f.)

Eine waagrechte (oder horizontale) Tangente hat die Steigung k =0.

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 0 hat.

Somit ist die Gleichung f'(x) =0 zu lösen.

f'(x) =-2 \*x +4

k =f'(x) =0; x =?

-2 \*x +4 =0

x =2

Die Funktion f hat an der Stelle x =2 eine waagrechte Tangente.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse y =0. (siehe Randspalte)

{{Grafik: nicht übertragen}}

-----

In der angewandten Mathematik werden bei praxisbezogenen Aufgaben häufig andere Variablen als x verwendet, beispielsweise t für die Zeit, v für die Geschwindigkeit, m für die Masse usw.

Die angegebenen Ableitungsregeln gelten natürlich analog auch für andere Variablen als x.

j-42

+++Beispiel 1.29: |B|

Ableitungen allgemein

Berechnen Sie die Ableitungsfunktion.

Berechnen Sie die Ableitung an der gegebenen Stelle.

Interpretieren Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

a.)

Flächeninhalt eines Quadrates

Vergleichen Sie: f(x) =x^2

f'(x) =2 \*x

|!|: f(x\_0 +1) ~~ f(x\_0) +f'(x\_0)

A =a^2

('dA)/('da) =2a

Für a =10 erhalten Sie ('dA)/('da)|\_(a =10) =('dA)/('da)(10) =2 \*10 =20.

('dA)/('da)|\_(a =10) =20 ist die lokale Änderungsrate bei a =10.

Interpretation:

Ändert man bei a =10 den Wert von a um eine Einheit, dann ändert sich der Wert von A näherungsweise (linear) um 20 Einheiten.

A(10) =100

A(11) ~~100 +20 =120

Vergleichen Sie mit dem berechneten Funktionswert: A(11) =121

---

b.)

Kreisfläche

A =r^2'pi

('dA)/('dr) =2r'pi

Für r =100 erhalten Sie ('dA)/('dr)|\_(r =100) =2 \*100 \*'pi =200 \*'pi.

('dA)/('dr)|\_(r =100) =200 \*'pi ist die lokale Änderungsrate bei r =100.

Interpretation:

Ändert man bei r =100 den Wert von r um eine Einheit, dann ändert sich der Wert von A näherungsweise (linear) um 200 \*'pi Einheiten.

f(x) =x^2 \*'pi

f'(x) =2 \*x \*'pi

Die lokale Änderungsrate der Kreisfläche ist gleich dem Kreisumfang.

---

c.)

Kugelvolumen

V =4/3 \*r^3'pi

('dV)/('dr) =4r^2'pi

Für r =30 erhalten Sie ('dV)/('dr)|\_(r =30) =('dV)/('dr)(30) =4 \*30^2 \*'pi =3600 \*'pi.

('dV)/('dr)|\_(r =30) =3600 \*'pi ist die lokale Änderungsrate bei r =30.

Interpretation:

Ändert man bei r =30 den Wert von r um eine Einheit, dann ändert sich der Wert von V näherungsweise (linear) um 3600 \*'pi Einheiten.

V(30) =36000 \*'pi

V(30,1) ~~36000 \*n'pi +0,1 \*3600 \*'pi =36360 \*'pi

Vergleichen Sie mit dem berechneten Funktionswert: V(30,1) =36361,2 \*'pi

f(x) =4/3 \*x^3 \*n

f'(x) =4 \*x^2 \*n

Die lokale Änderungsrate des Kugelvolumens ist gleich der Kugeloberfläche.

---

d.)

Wegfunktion

s =5 \*t^2 +3 \*t +2

('ds)/('dt) =10 \*t +3

Für t =4 erhalten Sie ('ds)/('dt)|\_(t =4) =('ds)/('dt)(4) =10 \*4 +3 =43.

('ds)/('dt)|\_(t =4) =43 ist die momentane Änderungsrate bei t =4.

Interpretation:

Ändert man bei t =4 den Wert von t um eine Einheit, dann ändert sich der Wert von s näherungsweise (linear) um 43 Einheiten.

s(4) =94

s(5) ~~94 +43 =137

Vergleichen Sie mit dem berechneten Wert: s(5) =142

f(x) =5 \*x^2 +3 \*x +2

f'(x) =10 \*x +3

Die momentane Änderungsrate des Weges ist gleich der Geschwindigkeit.

-----

j-43

##### Höhere Ableitungen

Leitet man die erste Ableitung f' einer Funktion f nochmals ab, dann heißt die Ableitung dieser Ableitungsfunktion die zweite Ableitung von f nach x.

##### Definition: Zweite Ableitung einer Funktion

||Ist die erste Ableitung f' einer Funktion f differenzierbar, so heißt deren Ableitung f'' mit

f''(x) ='lim['De x -> 0](f'(x +'De x) -f'(x))/('De x) zweite Ableitung von f.\||

---

|I|:

Höhere Ableitungen werden durch wiederholtes Differenzieren berechnet.

Schreibweisen der zweiten Ableitung von f:

y'' =(y')' =(f'(x))' =f''(x) =('d)/('dx)f'(x) =('d)/('dx)('df(x))/('dx) =('d^2f(x))/('dx^2)

Lies: f zwei Strich

Lies: d zwei f nach 'dx Quadrat.

Ist die zweite Ableitung f'' einer Funktion f differenzierbar, so bezeichnet man deren Ableitung als dritte Ableitung f''' von f.

Ab der vierten Ableitung verwendet man zur Kennzeichnung anstelle der Striche hochgestellte und eingeklammerte Zahlen f^[4], f^[5], ...

---

f Funktion f

f' erste Ableitung von f

f'' zweite Ableitung von f

f''' dritte Ableitung von f

f^[4] vierte Ableitung von f

...

f^[n] n-te Ableitung von f

---

|!|: Beachten Sie:

('d^2 f(x))/('d^2) \=(('df(x))/('dx))^2

Die zweite Ableitung ('d^2 f(x))/('d^2) ist nicht gleich dem Quadrat der ersten Ableitung (('df(x))/('dx))^2.

|T|: Beachten Sie

Mit f' =('df)/('dx) ist die Ableitung nach der Variable x definiert.

Wollen Sie nach einer anderen Variablen als x ableiten, müssen Sie dies auch genau anschreiben:

z.B.: ('ds)/('dt); ('dO)/('dr); ('dV)/('da); ('dS)/('dY); usw.

---

+++Beispiel 1.30: |B|

Höhere Ableitungen der Funktion f.

a.)

Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion f.

f(x) =x^3 +3 \*x^2 -2 \*x +1

f'(x) =3 \*x^2 +6 \*x -2

f''(x) =6 \*x +6

f[4](x) =0

Alle weiteren höheren Ableitungen sind null.

---

b.)

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen der Funktion s nach der Variablen t.

s(t) =-4,9 \*t^2 +30 \*t +10

('ds(t))/('dt) =s'(t) =-9,8 \*t +30

('d^2s(t))/('dt^2) =s''(t) =-9,8

---

c.)

Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion O nach der Variablen r.

O(r) =2/3 \*'pi \*r^3 +r^2 \*'pi

('dO(r))/('dr) =O'(r) =2 \*'pi \*r^2 +2 \*r \*'pi

('d^2 O(r))/('dr^2) =O''(r) =4 \*'pi \*r +2 \*'pi

('d^3 O(r))/('dr^3) =O'''(r) =4 \*'pi

('d^4 O(r))/('dr^4) =O[4](r) =0

-----

j-43

Ableitungsregeln:

(c)' =0

(xn)' =n \*x^(n -1)

(c \*u)' =c \*u'; c 'el 'R

(u ± v)' =u' +-v'

Gleichung der Tangente

y =f'(x\_0) \*(x -x\_0) +y\_0 im Punkt P\_0(x\_0|y\_0)

Mittlere Änderungsrate oder Steigung der Sekante im Intervall

[x\_0; x\_1]:

('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0)/('De x)

##### Übungsaufgaben

+++1.027 |B|

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =x^4

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^4)/2

**[]**

---

c.)

f(x) =x

**[]**

---

d.)

f(x) =1

**[]**

---

e.)

f(x) =5

**[]**

---

f.)

f(x) =5 \*x^7

**[]**

---

g.)

f(x) =5 \*x

**[]**

---

h.)

f(x) ='pi \*x

**[]**

---

i.)

f(x) =3/4

**[]**

---

j.)

f(x) =(3 \*x^2)/4

**[]**

---

k.)

f(x) =3/4 \*x

**[]**

---

l.)

f(x) =('pi \*x)/4

**[]**

------

+++1.028 |B|

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =x^2 +3 \*x

**[]**

---

b.)

f(x) =5 \*x^2 -1/3 \*x^2 -1/3 \*x -3

**[]**

---

c.)

f(x) =x^3 -x^2 -x -1

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^4)/8 +x^3 -2 \*x +4

**[]**

---

e.)

f(x) =1/2 \*x^7 -1/3 \*x -1/2

**[]**

---

f.)

f(x) =5 \*x^6 -2 \*x^3 \*'w[5](2)

**[]**

---

g.)

f(x) ='w(3) \*x^5 +'pi \*x^3 -x +'sin(20)

**[]**

---

h.)

f(x) =2/5 \*x^9 -4 \*x^4 -1/3 \*x ^'pi^2

**[]**

-----

+++1.029 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =6x -1

**[]**

---

b.)

f(x) =9x^5 -'lg(10)

**[]**

---

d.)

f(x) =6 \*(3x^4 +13)

**[]**

---

e.)

f(x) =0,75 \*(1,2x^2 -0,4)

**[]**

---

f.)

f(x) ='w(2) \*x -2'pi

**[]**

---

g.)

f(x) =(x^2)/2 -1/('w(2)

**[]**

-----

+++1.030 |B, C|

Zeichnen Sie den Graphen der gegebenen Funktion f und die Tangenten an die Funktion an den Stellen x =-2 und x =0.

Berechnen Sie f'(-2) und f'(0) der gegebenen Funktion f.

Interpretieren Sie diese berechneten Werte.

a.)

f(x) =x^2 +3 \*x +2

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^2)/2 -0,5

**[]**

---

c.)

f(x) =-x^2 +4

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^2)/4 +x +1

**[]**

-----

+++1.031 |B|

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P der Kurve mit der gegebenen Gleichung.

a.)

P(-2|y\_0)

f(x) =x^2

**[]**

---

b.)

P(3|y\_0)

f(x) =x\_2 -3

**[]**

---

c.)

P(-1|y\_0)

f(x) =-x^2 +7

**[]**

---

d.)

P(1|y\_0) ^

f(x) =5x^2 -1

**[]**

---

e.)

P(0|y\_0)

f(x) =x^2 +2x +1

**[]**

---

f.)

P(-4|y\_0)

f(x) =3x^2 -4x -40

**[]**

-----

+++1.032 |B|

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung y =(x^2)/(12) -x/6 +1.

Zeichnen Sie ihren Graphen und die Tangenten an den Stellen x\_0 für x\_0 'el {-5, 0, 7}.

Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten.

**[]**

-----

+++1.033 |B|

In den vier Punkten P\_i(x\_i|-4) der Parabel mit der Gleichung f(x) =x^4 -10^2 +5 sind die Tangenten zu legen.

Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten.

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) =x^3 -4 \*x^2 -x +4.

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [-2; 5].

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [1; 3] und zeichnen Sie die Sekante.

Interpretieren Sie die mittlere Änderungsrate im Sachverhalt.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x =1.

Interpretieren Sie die lokale Änderungsrate im Sachverhalt.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Funktion die Steigung 1 hat.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Funktion horizontale Tangenten hat.

**[]**

-----

j-45

Lokale Änderungsrate oder Steigung der Sekante an der Stelle \_0:

f\*(x\_0) ='lim['De x -> 0]((f(x\_0 +'De s) -f(x\_0))/('De x))

{{Grafik: Funktionsgraph mit Sekante und Tangente}}

+++1.035 |A, B, D|

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) =1 \*x^3 +5 \*x^2 -x -1.

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall [-4; 2].

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [-3; -2] und zeichnen Sie die zugehörige Sekante.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle x =-3 und zeichnen Sie die zugehörige Tangente.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Funktion die Steigung k =1 hat. Begründen Sie jeden Ihrer Rechenschritte.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Funktion horizontale Tangenten hat.

**[]**

-----

+++1.036 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung nach der unabhängigen Variable.

a.)

s(t) =3 \*t^2 +t -1

**[]**

---

b.)

f(z) =(z^2)/2 -4 \*z +1/8

**[]**

---

c.)

K(q) =0,1 \*q^2 -0,5 \*q +10

**[]**

---

d.)

C(a) =5 \*a^8 +0,2

**[]**

---

e.)

h(t) =-5 \*t^2 +7,5 \*t +1,5

**[]**

---

f.)

A(r) =5 \*r \*'pi +4 \*'pi

**[]**

---

g.)

V(h) =('pi)/3 \*(6 \*h^2 -h^3)

**[]**

---

h.)

A(r) =2 \*(r^2 \*'pi +3 \*r \*'pi)

**[]**

---

+++1.037 |B|

Berechnen Sie die gesuchte Ableitung an der angegebenen Stelle.

a.)

Flächeninhalt eines Quadrats:

A(a) =a^2

a =500

('dA/'da) =**[]**

---

b.)

Volumen eines Würfels:

V(a) =a^3

a =100

('dV)/('da) =**[]**

---

c.)

Oberfläche einer Kugel:

=(r) =4 \*r^2 \*'pi

r =200

('dO)/('dr) =**[]**

---

d.)

Geschwindigkeit:

v(t) =5 \*t

t =10

('dv)/('dt) =**[]**

---

e.)

Wegstrecke eines Teilchens:

s(t) =3 \*t^2 +5 \*t +3

t =3

('ds)/('dt) =**[]**

t =3

('d^2)/('dt^2) =**[]**

-----

+++1.038 |C, D|

Der Gewinn G in Geldeinheiten, der bei einer Produktion von x Mengeneinheiten erzielt wird, lässt sich als Funktion G beschreiben.

Erklären Sie, was G'(250) =-8 besagt und interpretieren Sie dies.

**[]**

-----

+++1.039 |C, D|

Die Kosten K in Geldeinheiten, um q Tonnen Eisenerz zu gewinnen, sind durch die Funktion K gegeben.

Erklären Sie, was ('dK)/('dq)|\_(q =2000) =120 besagt und interpretieren Sie dies.

**[]**

-----

+++1.040 |C, D|

Die Menge q an Zucker in Tonnen, die beim Preis p in Geldeinheiten/Tonne produziert wird, lässt sich durch die Funktion q beschreiben.

Erklären Sie, was ('dq)/('dp)|\_(p =150) =3 bedeutet und interpretieren Sie dies.

**[]**

-----

+++1.041 |B|

a.)

Berechnen Sie die zweite Ableitung von f mit f(x) =7 \*x^5 -3 \*x^3 +x^2 +x -12.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die dritte Ableitung von f mit f(x) =x^4 +3 \*x^3 -2 \*x^2 +5 \*x -3.

**[]**

-----

+++1.042 |B|

Differenzieren Sie die Funktion f so oft, bis die zugehörige Ableitung gleich null wird.

a.)

f(x) =x^2 -2 \*x +1

**[]**

---

b.)

f(x) =x^3 +3 \*x^2 -4 \*x +2

**[]**

-----

+++1.043 |B|

Gegeben ist die Funktion f mit y =4 \*x^3 -6 \*x^2.

a.)

Zeigen Sie:

x^2 \*('d^2y)/'dx^2) -2 \*x \*('dy)/('dx) -12 \*x^2 =0

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die x-Werte für die gilt:

('dy)/('dx) =0

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die x-Werte für die gilt:

('d^2y)/('dx^2) =0

**[]**

-----

j-46

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f''(x\_0) >0 Linkskrümmung bei x\_0

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f''(x\_0) <0 Rechtskrümmung bei x\_0

+++1.044 |B, C|

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit f(x) =x^3 -3 \*x^2 +4.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Markieren Sie mit Farbe jene Bereiche auf der x-Achse, in denen der Funktionsgraph steigt.

Markieren Sie mit einer anderen Farbe jenen Bereich auf der x-Achse, in dem der Funktionsgraph fällt.

**[]**

---

b.)

Markieren Sie mit Farbe jenen Bereich auf der x-Achse, in dem die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen zunimmt. Markieren Sie mit einer anderen Farbe jenen Bereich auf der x-Achse, in dem die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen kleiner wird.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die x-Werte für die gilt: f'(x) =0

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den x-Wert für den gilt: f''(x) =0

**[]**

-----

{{Grafik: Produktlebezyklus; Funktionsgraph}}

Ein typischer Produktlebenszyklus

+++1.045 |A, B, C|

Der Produktlebenszyklus eines Produktes beschreibt den mengenmäßigen A B Umsatz U in Abhängigkeit von der Zeit t.

Für ein bestimmtes Produkt gilt die Funktion U mit U(t) =0,01 \*(35 \*t^2 -0,8 \*t^3).

t Zeit in Wochen seit Produkteinführung

U(t) Umsatzmenge in ME t Wochen nach Produkteinführung

t in Wochen U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

t in Wochen: 0

U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung: 0

t in Wochen: 10

U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung: 27

t in Wochen: 20

U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung: 76

t in Wochen: 30

U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung: 99

t in Wochen: 40

U(t) in ME t Wochen nach Produkteinführung: 48

a.)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für das Zeitintervall [10; 20]. Erklären Sie, was dieser Wert aussagt.

**[]**

b.)

Zeichnen Sie in der Grafik die Sekante durch die Punkte (10|27) und (20|76) ein.

Erklären Sie, welcher Zusammenhang zwischen der in a) berechneten mittleren Änderungsrate und der gezeichneten Sekante besteht.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate nach 10 Wochen. Erklären Sie, was dieser Wert aussagt.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, was der Ausdruck ('dU)/('dt)|\_(t =40) bedeutet.

Berechnen Sie den Zahlenwert des Ausdrucks.

**[]**

---

e.)

Lesen Sie aus der Grafik ab, wann das Produkt nicht mehr abgesetzt werden kann.

**[]**

-----

j-47

+++1.046 |A, B, C, D|

{{Grafik: Die aus dem Karton gefaltete Schachtel hat die Länge y, die Breite z und die Höhe x.}}

Aus einem Karton (a =25 cm und b =20 cm) werden an den Ecken Quadrate abgeschnitten. Dann wird der Karton zu einer Schachtel gefaltet.

Aus der Volumsformel V =x \*y \*z ergibt sich durch Einsetzen von y =a -2 \*x und z =b -2 \*x die Funktion V mit

V(x) =x \*(a -2 \*x) \*(b -2 \*x)

V(x) =4 \*x^3 -90 \*x^2 +500 \*x

x Höhe der Schachtel in cm

Höhe der Schachtel in cm Volumen der Schachtel in cm 3

a.)

Stellen Sie das Volumen V der Schachtel in Abhängigkeit von der Höhe x grafisch dar.

Lesen Sie aus dem gezeichneten Graphen ab:

-) die Höhe x, bei der das Volumen der Schachtel maximal wird,

-) das maximale Volumen der Schachtel,

-) den Bereich für x, für den V(x) >=0 ist und

-) den Bereich von x, für den V fallend ist.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks (V(8) -V(6))/(8 -6).

Erklären Sie, was dieser Wert aussagt.

**[]**

---

c.)

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die den Ausdruck (V(8) -V(6))/(8 -6) korrekt interpretieren. Der Wert des Ausdrucks gibt ...

**[]** A: das Volumen der Schachtel für die Höhe x =6 cm an.

**[]** B: an, um wie viel das Volumen der Schachtel steigt/fällt, wenn die Höhe von x =6 cm um 2 cm vergrößert wird.

**[]** C: die Steigung der Sekante an den Graphen von V im Intervall [6; 8] an.

**[]** D: an, um wie viel Prozent das Volumen der Schachtel pro Zentimeter steigt/fällt, wenn die Höhe von x =6 cm um 1 cm vergrößert wird.

**[]** E: die lokale Änderungsrate bei x =6 an.

---

d.)

Berechnen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle x =6. Interpretieren Sie den berechneten Wert.

**[]**

-----

j-48

##### Ziele erreicht?

+++Z 1.1 |C, D|

Der Treibstoffverbrauch eines Autos wird in Litern pro 100 km angegeben. Der Verbrauch ist abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit in km/h.

Bei einer Testfahrt wurde festgestellt, dass die momentane Änderungsrate des Treibstoffverbrauches bei 50 km/h 0,03 Einheiten beträgt.

a.)

Schreiben Sie die korrekte Einheit dieser momentanen Änderungsrate an.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie die momentane Änderungsrate des Treibstoffverbrauches im Sachzusammenhang.

**[]**

-----

+++Z 1.2 |B, C|

Die Anzahl der Teilnehmer am Wiener Stadtmarathon in den letzten 16 Jahren kann mit der Funktion f beschrieben werden.

t Anzahl der Jahre ab dem Jahr 2000

f(t) Anzahl der Teilnehmer im Jahr 2000 +t

a.)

Interpretieren Sie die Bedeutung von f(14) =6348.

**[]**

---

b.)

Im Jahr 2005 nahmen 5233 Personen am Stadtmarathon teil, im Jahr 2015 waren es 5959.

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für diesen Zeitraum.

**[]**

-----

+++Z 1.3 |C, D|

Gegeben sind die Polynomfunktionen f\_1, f\_2, f\_3 und f\_4.

{{Grafik: Polynomfunktionen nicht übertragen}}

{{Grafik: Ableitungen; Funktionsgraphen}}

Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f\_1, f\_2, f\_3 und f\_4 die zugehörigen Graphen der Ableitungen A, B, C und D zu.

f\_1: Ableitung: **[]**

f\_2: Ableitung: **[]**

f\_3: Ableitung: **[]**

f\_4: Ableitung: **[]**

-----

j-49

+++Z 1.4 |B, C, D|

Der Verlauf einer Grippewelle in einer Region lässt sich angenähert durch eine Funktion E beschreiben.

E(t) =-0,007 \*t^3 +0,69 \*t^2 +8,38 \*t +1

t Zeit seit Ausbruch der Grippewelle in Wochen

E(t) Anzahl der Erkrankten in Tausend t Wochen nach Ausbruch der Grippewelle

a.)

Berechnen Sie den Wert von (E(10) -E(0))/(10 -0).

**[]**

---

b.)

Kreuzen Sie die Aussage(n) an, die den Ausdruck (E(10) -E(0))/(10 -0)korrekt interpretieren. Der Ausdruck beschreibt die ...

**[]** A: Anzahl der Neuerkrankten in Tausend nach 10 Wochen.

**[]** B: mittlere Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in Tausend innerhalb der ersten 10 Wochen.

**[]** C: prozentuelle Änderung der Anzahl der Erkrankten in Tausend innerhalb der ersten 10 Wochen.

**[]** D: Zunahme der Anzahl der Erkrankten in Tausend in den ersten 10 Wochen.

**[]** E: momentane Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in Tausend nach 10 Wochen.

---

c.)

Berechnen Sie die erste Ableitung von E an der Stelle 10.

Interpretieren Sie die Bedeutung Ihres Ergebnisses.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, warum E(11) ungefähr E(10) +E'(10) ist.

**[]**

---

e.)

Vergleichen Sie die Zahlenwerte aus a) und c) und erklären Sie, warum sich diese unterscheiden.

**[]**

-----

j-50

+++Z 1.5 |B, C|

In der Grafik ist die durchschnittliche Masse m eines Embryos in Gramm (g) in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen seit der Zeugung dargestellt (7 <=t <=40).

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Bestimmen Sie mithilfe der Grafik die durchschnittliche Massenzunahme eines Embryos vom Ende der 10. bis zum Ende der 20. Woche, vom Ende der 20. bis zum Ende der 30. Woche und vom Ende der 30. bis zum Ende der 40. Woche.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie die Tangente an die Funktion m an der Stelle t =25 Wochen. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an m.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

**[]**

-----

j-51

# !!2 Eigenschaften von Polynomfunktionen

Isaac Newton (1643 bis 1727) entwickelte Grundlegendes zur Differenzialrechnung, um physikalische Zusammenhänge mathematisch einfach beschreiben und erklären zu können. Die physikalische Methode von Newton, die er bei der Ableitung des Gravitationsgesetzes entwickelte, hat die gesamte Physik und Technik geprägt. Generell ist die Analysis Grundlage für viele Berechnungsmethoden in den Naturwissenschaften.

Die Untersuchungen von Funktionsgraphen auf ihre Eigenschaften begannen etwa im Jahr 1637, in dem der "Discours de la Méthode" (voller Titel: Von der Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Forschung) von René Descartes (1596 bis 1650) erschien.

In diesem bedeutsamen philosophischen Werk ist das Grundprinzip der Untersuchung von Funktionsgraphen systematisch dargelegt.

Kurz vorher hatte Pierre de Fermat (1601 bis 1665) ebenfalls ähnliche Methoden ausgearbeitet, aber seine Abhandlung blieb bis 1679 ungedruckt.

Ihre heutige Darstellungsform hat die Funktionsdiskussion durch Leonhard Euler (1707 bis 1783) und insbesondere durch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) und Isaac Newton bekommen.

Die Methoden der Funktionsdiskussion finden heute in vielen Bereichen der Naturwissenschaften, aber auch in der Betriebs- und in der Volkswirtschaftslehre Anwendung.

{{Grafik: Erstausgabe von René Descartes "Discours de la méthode"}}

Das wohl bekannteste Zitat von Descartes:

Cogito ergo sum

(Ich denke, also bin ich)

René Descartes, 1596 bis 1650, franz. Philosoph und

Mathematiker

---

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) Eigenschaften von Funktionen, insbesondere Monotonie- und Krümmungsverhalten mithilfe der Ableitungsfunktionen erklären und berechnen,

-) Zusammenhänge zwischen der ersten Ableitung einer Funktion und der Steigung der Funktion erklären,

-) aus der zweiten Ableitung einer Funktion das Krümmungsverhalten der Funktion ermitteln,

-) Ableitungsfunktionen zur Beschreibung von Sachverhalten aus unterschiedlichen Themengebieten einsetzen, damit lokale Änderungsraten berechnen und interpretieren,

-) aus gegebenen Eigenschaften einer Funktion deren Funktionsterm ermitteln,

-) die Ableitungen einer Wegfunktion s nach der Zeit als Geschwindigkeitsfunktion v und Beschleunigungsfunktion a interpretieren.\||

---

##### Untersuchung von Funktionen auf ihre Eigenschaften

Die Funktionsdiskussion ist die Untersuchung eines Funktionsgraphen, etwa auf Hoch- und Tiefpunkte oder Wendepunkte mithilfe der Analysis.

Der Grundgedanke der Funktionsdiskussion besteht darin, dass geometrische Untersuchungen von Funktionsgraphen mit rechnerischen Methoden verknüpft werden und umgekehrt.

Zur Untersuchung funktionaler Zusammenhänge ist es wichtig, das Verhalten der zugrundeliegenden Funktionen f zu kennen.

Dazu werden unter anderem folgende Eigenschaften der Funktion f behandelt:

-) Monotonieverhalten: In welchen Bereichen steigt oder fällt die Funktion?

-) Extremwerte: An welchen Stellen nimmt die Funktion ihre maximalen oder minimalen Werte an?

-) Krümmungsverhalten: Wo ist die Funktion wie gekrümmt?

Für differenzierbare Funktionen können diese Fragestellungen mithilfe der ersten und der zweiten Ableitung beantwortet werden.

---

f(x\_0) Funktionswert an der Stelle x\_0

f'(x\_0) Steigung an der Stelle x\_0

f''(x\_0) Krümmungsverhalten an der Stelle x\_0

j-52

{{Grafik: Drei Funktionsgraphen}}

Bei x =1 und x =3 hat die Funktion f jeweils einen Extrempunkt.

Die erste Ableitung f' hat dort jeweils einen Schnittpunkt mit der x-Achse (1|0) und (3|0).

Bei x =2 hat die Funktion f einen Wendepunkt, die erste Ableitung f' einen Extrempunkt und die zweite Ableitung f'' den Schnittpunkt (2|0) mit der x-Achse.

##### Worum geht's hier?

Der Verlauf der Funktion f mit f(x) =1/3 \*x^3 -2 \*x^2 +3 \*x wird grafisch dargestellt und mit den Graphen der ersten und zweiten Ableitung f' und f'' verglichen. f(x) =1/3 \*x^3 -2 \*x^2 +3 \*x

f'(x) =x^2 -4 \*x +3

f''(x) =2 \*x -4

Wertetabelle:

{{Tabelle aufgelöst}}

x: 0

f(x): 0

f'(x): 3

f''(x): -4

---

x: 1

f(x): 4/3

f'(x): 0

f''(x): -2

---

x: 2

f(x): 2/3

f'(x): -1

f''(x): 0

---

x: 3

f(x): 0

f'(x): 0

f''(x): 2

---

x: 4

f(x): 4/3

f'(x): 3

f''(x): 4

---

Aus dem Vergleich der Graphen erkennt man folgende Zusammenhänge:

##### Monotonie

Für x <=1 und für x >=3 ist die Funktion f streng monoton steigend.

Für x <1 und x >3 sind die Funktionswerte der ersten Ableitung positiv.

Von x =1 bis x =3 ist die Funktion f streng monoton fallend.

Für 1 < x < 3 sind die Funktionswerte der ersten Ableitung negativ.

##### Extrema

f hat bei x =1 im Punkt H (1|4/3) ein relatives Maximum.

f' hat bei x =1 eine Nullstelle und

f'' hat bei x =1 einen negativen Funktionswert: f''(1) =-2

f hat bei x =3 im Punkt T(3|0) ein relatives Minimum.

f' hat bei x =3 eine Nullstelle und

f'' hat bei x =3 einen positiven Funktionswert: f''(3) =2

##### Krümmungsverhalten

f ist für x <=2; rechts gekrümmt. ("Rechtskurve"; negative Krümmung; Drehung im Uhrzeigersinn)

f' ist für x <=2; fallend.

f'' ist für x <2; negativ, es liegt ein negatives Krümmungsverhalten vor.

f ist für x >=2; links gekrümmt. ("Linkskurve"; positive Krümmung; Drehung gegen den Uhrzeigersinn)

f' ist für x >=2; steigend.

f'' ist für x >2; positiv, es liegt ein positives Krümmungsverhalten vor.

An der Stelle x =2 ändert die Funktion ihr Krümmungsverhalten.

Der zugehörige Punkt W(2|2/3) heißt Wendepunkt.

In diesem Punkt geht die Rechtskrümmung in die Linkskrümmung über. Es gilt: f''(2) =0

An der Stelle x =2 hat die zweite Ableitung f'' eine Nullstelle und die erste Ableitung f' hat an der Stelle x =2 einen Extremwert (Minimum).

Weiters hat die Funktion f an der Stelle x =2 die größte negative Steigung.

Im vorliegenden einführenden Beispiel wurden alle wesentlichen Zusammenhänge zwischen der Funktion f und den Ableitungsfunktionen f' und f'' dargestellt.

Diese grundlegenden Zusammenhänge werden in den folgenden Beispielen noch vertieft.

j-53

##### Monotonie von Funktionen

Zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und ihrer ersten Ableitung gibt es einen einfachen Zusammenhang.

Ist die Funktion f in einem Intervall I differenzierbar, dann kann man mithilfe der ersten Ableitung f' berechnen, auf welchen Teilintervallen von I die Funktion f wächst oder fällt.

##### Definition: Monotonie

||Eine Funktion f heißt in einem Intervall I streng monoton steigend, wenn für alle

x\_1, x\_2 'el I mit x\_1 <x\_2 gilt: f(x\_1) <f(x\_2)

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I streng monoton fallend, wenn für alle

x\_1, x\_2 'el I mit x\_1 <x\_2 gilt: f(x\_1) > f(x\_2)\||

---

##### Satz: Zusammenhang zwischen Monotonieverhalten und erster Ableitung

||Sei die Funktion f im Intervall [a; b] stetig und in allen Stellen im Inneren des Intervalls [a; b] differenzierbar.

Wenn für alle Stellen im Inneren des Intervalls [a; b] gilt

-) f'(x) >0, dann ist f im Intervall [a; b] streng monoton steigend.

-) f'(x) >=0, dann ist f im Intervall [a; b] monoton steigend.

-) f'(x) <0, dann ist f im Intervall [a; b] streng monoton fallend.

-) f'(x) <=0, dann ist f im Intervall [a; b] monoton fallend.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Graph einer im Intervall [a; b] streng monoton steigenden Funktion

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Graph einer im Intervall [a; b] streng monoton fallenden Funktion

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f'(x) <0; f streng monoton fallend

f'(x) >0; f streng monoton steigend

f'(1) =0

---

+++Beispiel 2.1: |B, C|

Monotonieverhalten - quadratische Funktion

Die Funktion f mit f(x) =\*x^2 -x -1 ist bezüglich Steigung und Monotonieverhalten zu untersuchen.

Lösung:

Für die erste Ableitung gilt: f'(x) =x -1

Aus der Grafik in der Randspalte erkennt man beispielsweise:

f ist an der Stelle x =0 fallend.

Die Tangentensteigung an der Stelle x =0 ist negativ:

k =f'(0) =-1 <0

f ist an der Stelle x =2 steigend.

Die Tangentensteigung an der Stelle x =2 ist positiv:

k =f'(2) =1 >0

Allgemein gilt:

Für x <1 ist die Tangentensteigung negativ.

Es gilt:

f'(x) <0

x -1 <0

x <1

f ist somit streng monoton fallend für x <=1.

Für x >1 ist die Tangentensteigung positiv.

Es gilt:

f'(x) >0 x

-1 >0

x >1

f ist somit streng monoton steigend für x >=1.

An der Stelle x =1 ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.

Für x =1 ist die Tangente an den Graphen der Funktion f waagrecht.

Hier liegt ein Tiefpunkt von f vor.

Es gilt:

f'(x) =0

x -1 =0

x =1

-----

j-54

+++Beispiel 2.2: |B, C|

Monotonieverhalten - kubische Funktion

a.)

Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) =x^3 +3 \*x -1 auf ihr Monotonieverhalten.

---

b.)

Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) =x^3 -3 \*x -1 auf ihr Monotonieverhalten.

---

Lösung:

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f hat keine Extrema.

Für die erste Ableitung gilt: f'(x) =3 \*x^2 +3

Es gilt 3 \*x^2 +3 >0 für alle x 'el 'R und somit ist die Funktion f für alle x 'el 'R streng monoton steigend.

Die Funktion f hat keine Extrema (siehe Grafik in der Randspalte).

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion f hat 2 Extrempunkte

H(-1|1) und T(1|-3) und die erste Ableitung f' hat zwei Nullstellen bei x\_1 =-1 und bei x\_2 =1.

Für die erste Ableitung erhalten Sie f'(x) =3 \*x^2 -3 =3 \*(x -1) \*(x +1).

Aus der Grafik in der Randspalte erkennt man, dass die erste Ableitung für -1 <x <1 negativ ist. Somit ist die Funktion f von -1 bis 1 streng monoton fallend.

Für x <-1 und für x >1 ist die erste Ableitung positiv.

Daraus folgt, dass die Funktion f für x-Werte bis -1 und für x-Werte ab 1 streng monoton steigend ist.

An den Stellen x =1 und x =-1 schneidet der Graph der ersten Ableitung die x-Achse. An diesen Stellen liegen Extrema der Funktion f vor.

-----

##### Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten einer Funktion f wird durch die Änderung der Steigung der Funktion f beschrieben. Deshalb lässt sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f durch die zweite Ableitung f'' dieser Funktion beschreiben.

##### Definition: Krümmungsverhalten

||Der Graph einer differenzierbaren Funktion f heißt

-) rechtsgekrümmt im Intervall I, wenn die erste Ableitung f' im Intervall I abnimmt.

-) linksgekrümmt im Intervall I, wenn die erste Ableitung f' im Intervall I zunimmt.\||

---

Hat eine Funktion f eine zweite Ableitung, so folgt aus den Eigenschaften für die Monotonie von Funktionen, dass

-) die Ableitungsfunktion f' abnimmt, wenn f''(x) <0 und

-) die Ableitungsfunktion f' zunimmt, wenn f''(x) >0.

Synonyme für das Krümmungsverhalten:

Rechtskrümmung:

im Uhrzeigersinn gekrümmt

konkav gekrümmt

negative Krümmung

degressiver Funktionsverlauf

Linkskrümmung:

gegen den Uhrzeigersinn gekrümmt

konvex gekrümmt

positive Krümmung

progressiver Funktionsverlauf

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Graph einer Funktion f ist im Intervall I linksgekrümmt, wenn f' im Intervall I zunimmt.

Eine Zunahme der Steigung der Kurve bedeutet eine positive zweite Ableitung, f''(x) >0.

Eine negative zweite Ableitung, f''(x) <0, bedeutet eine Abnahme der Steigung der Kurve, der Graph der Funktion f ist rechtsgekrümmt.

---

j-55

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

---

+++Beispiel 2.3: |B, C|

Krümmungsverhalten

Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) =-2 \*x an den Stellen x =-1 und x =1 auf ihr Krümmungsverhalten.

Lösung:

f'(x) =x^2 -2

f''(x) =2 \*x

An der Stelle x =-1 gilt:

f''(-1) =-2 <0

f' ist bei x =-1 fallend.

Die Steigungen der Tangenten an f nehmen in der Umgebung von x =-1 ab. f ist bei x =-1 rechtsgekrümmt (Rechtskurve; Drehung im Uhrzeigersinn).

An der Stelle x =1 gilt:

f''(1) =2 <0

f' ist bei x =1 steigend.

Die Steigungen der Tangenten an f nehmen in der Umgebung von x =1 zu. f ist bei x =1 linksgekrümmt (Linkskurve; Drehung gegen den Uhrzeigersinn).

-----

##### Satz: Zusammenhang zwischen Krümmungsverhalten und zweiter Ableitung

||Ist die zweite Ableitung f'' im Intervall I negativ, so ist f im Intervall I rechtsgekrümmt.

f''(x) <0

für alle inneren Stellen des Intervalls I

Der Graph von f ist im Intervall I rechtsgekrümmt.

f' ist streng monoton fallend im Intervall I.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ist die zweite Ableitung f'' einer Funktion im Intervall I positiv, so ist f im Intervall I linksgekrümmt. f''(x) <0

für alle inneren Stellen des Intervalls I

Der Graph von f ist im Intervall I linksgekrümmt.

f' ist streng monoton steigend im Intervall I.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}\||

---

|T|: Das Verhalten eines Funktionsgraphen an der Stelle x0 wird beschrieben durch:

x\_0 Stelle

f(x\_0) Funktionswert

f'(x\_0) Steigung

f''(x\_0) Krümmungsverhalten

---

j-56

##### Übungsaufgaben

+++2.001 |C|

Lesen Sie ab, in welchen der Punkte A bis H die Funktion f die vorliegenden C Eigenschaften erfüllt. Mehrfachlösungen sind möglich.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f'(x) =0 und f''(x) >0

Punkt: **[]**

f(x) >0 und f'(x) >0

Punkt: **[]**

f(x) <0 und f'(x) >0

Punkt: **[]**

f'(x) <0 und f''(x) >0

Punkt: **[]**

f(x) >0 und f''(x) <0

Punkt(e): **[]**

-----

+++2.002 |C|

In der Randspalte ist der Graph der Funktion f dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Schreiben Sie in das vorgesehene Feld, in welchen der Punkte A bis G die Funktion f jeweils die angegebenen Eigenschaften erfüllt. Mehrfachlösungen sind möglich.

Punkt: **[]**;f(x) <0; f'(x) =0; f''(x) >0

Punkt: **[]**;f(x) >0; f'(x) <0; f''(x) <0

Punkt: **[]**;f(x) >0; f'(x) >0; f''(x) <0

Punkt: **[]**;f(x) =0; f'(x) =0; f''(x) <0

Punkt: **[]**;f(x) <0; f'(x) >0; f''(x) >0

Punkt: **[]**;f(x) <0; f'(x) <0; f''(x) >0

Punkt: **[]**;f(x) >0; f'(x) =0; f''(x) <0

-----

+++2.003 |C|

In der Randspalte ist der Graph der Funktion f dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ordnen Sie den gegebenen Punkten A bis G der Funktion f die Eigenschaften für den Funktionswert f(x), den Wert der Ableitungsfunktion f'(x) und den Wert der zweiten Ableitung f''(x) zu.

Schreiben Sie "<", "=" oder "<" in die vorgegebenen Eingabefelder.

Punkt: A; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: B; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: C; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: D; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: E; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: F; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

Punkt: G; f(x) **[]**0; f'(x) **[]**0; f''(x) **[]**0

-----

+++2.004 |B, D|

Ermitteln Sie, in welchen Bereichen die angegebene Funktion f streng monoton (steigend oder fallend) ist.

Schreiben Sie, ausgehend vom Graphen der Funktion, die Art der Monotonie an und begründen Sie Ihre Vermutung mithilfe der ersten Ableitung.

a.)

f(x) =-3 \*x +2

D ='R

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2

D ='R

**[]**

---

c.)

f(x) =-x^2 +2 \*x -1

D ='R

**[]**

---

d.)

f(x) =x^3 -1

D ='R

**[]**

---

e.)

f(x) =x^3 -3 \*x

D ='R

**[]**

-----

|V|: Führen Sie Ihre Vergleiche von f, f' und f'' analog zum einführenden Beispiel dieses Kapitels aus.

+++2.005 Der Verlauf der Funktion f ist im gegebenen Intervall grafisch darzustellen B C und mit dem Graphen der ersten und zweiten Ableitung zu vergleichen.

Zeichnen Sie die Graphen für f, f' und f'' in drei untereinanderliegenden Koordinatensystemen.

a.)

y =1/5 x^3 -1,6 x

[-3; 3]

**[]**

---

b.)

y =(x^3)/3 -x

[-2,5; 2,5]

**[]**

---

c.)

y =(x^3)/6 -(x^2)/2 +(3x)/2 +2

[-3; 5]

**[]**

---

d.)

y =(x^4)/(16) -(x^2)/2 -1

[-4; 4]

**[]**

-----

j-57

+++2.006 |B, C|

Untersuchen und interpretieren Sie den Verlauf der folgenden Funktionen für x 'el {-1; 0; 1} durch Berechnung des Funktionswertes, der ersten Ableitung (Steigungsverhalten) und der zweiten Ableitung (Krümmungsverhalten). Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion an den angegebenen Stellen.

a.)

f(x) =x^2 -1

**[]**

---

b.)

f(x) =-x^2 -2x +1

**[]**

---

c.)

f(x) =x^3 -x

**[]**

---

d.)

f(x) =x^3 -3x

**[]**

---

e.)

f(x) =(x^3)/6 -(3x)/2 +1

**[]**

---

f.)

f(x) =x^4

**[]**

-----

+++2.007 |B, C|

Interpretieren Sie den Verlauf der Funktion f an der Stelle x\_0 hinsichtlich Funktionswert, Steigung und Krümmung. Skizzieren Sie den Graphen in der Umgebung der Stelle x\_0.

a.)

x\_0 =1:

f(1) =3,

f'(1) =1,

f''(1) =0,5

**[]**

---

b.)

x\_0 =-1:

f(-1) =0,

f'(-1) =-1,

f''(-1) =0,5

**[]**

---

c.)

x\_0 =-2:

f(-2) =-1,

f'(-2) =0,

f''(-2) =-1,5

**[]**

---

d.)

x\_0 =3:

f(3) =1,

f'(3) =0,

f''(3) =0,5

**[]**

-----

##### Wendepunkte

Im letzten Abschnitt wurden Kurven auf ihr Krümmungsverhalten untersucht und festgestellt, dass es Punkte gibt, in denen sich dieses Krümmungsverhalten ändert. Solche Punkte werden als Wendepunkte bezeichnet.

##### Definition: Wendepunkt und Wendetangente

||Ein Wendepunkt ist ein Punkt, in dem eine Funktion f ihr Krümmungsverhalten ändert.

Die Wendetangente ist die Tangente im Wendepunkt.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Wendepunkt mit fallender Wendetangente

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Wendepunkt mit steigender Wendetangente

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente; Terrassenpunkt

f''(x\_0) =0 und f'(x\_0) =0

---

Wegen der Änderung des Krümmungsverhaltens durchsetzt die Wendetangente die Kurve im Wendepunkt.

##### Satz: Notwendige Bedingung für eine Wendestelle

||x\_0 ist Stelle eines Wendepunktes von f -> f''(x\_0) =0\||

---

Das Lösen der Gleichung f''(x) =0 führt zu Stellen, an denen Wendepunkte auftreten können. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die zweite Ableitung f'' an einer solchen Stelle x\_0 ihr Vorzeichen ändert (d. h. die x-Achse durchsetzt).

Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn die dritte Ableitung f''' an dieser Stelle x\_0 ungleich null ist.

##### Satz: Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle

||f''(x\_0) =0 und f'''(x\_0) \*0 -> x\_0 ist Stelle eines Wendepunktes von f. \||

---

Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht.

So hat zum Beispiel die Funktion f mit f(x) =x^5 bei 0 eine Wendestelle, aber f'''(0) =0.

Allgemein gilt für die Existenz einer Wendestelle: f''(x) =0

##### Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung für eine Wendestelle

||x\_0 ist Wendestelle <--> f''(x\_0) =0 und die erste von null verschiedene Ableitung an der Stelle x\_0 ist ungerade.\||

---

j-58

Die Berechnung der dritten Ableitung ist manchmal mit einem großen rechnerischen Aufwand verbunden. Die dritte Ableitung f'''(x) wird daher hier nur dann verwendet, wenn die Berechnung nicht mit allzu großem Zeitaufwand verbunden ist oder aus der Grafik nicht zu erkennen ist, ob an einer Stelle x\_0 ein Wendepunkt vorliegt oder nicht.

+++Beispiel 2.4: |B|

Wendepunkte und Wendetangenten

Berechnen Sie die Wendepunkte und die Gleichungen der Wendetangenten der Funktion f mit der Funktionsgleichung:

f(x) =(x^4)/2 -x^3 -6x^2 +12x +10

f'(x) =2x^3 -3x^2 -12x +12

f''(x) =6x^2 -6x -12

f'''(x) =12x -6

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lösung:

Aus f''(x) =0 ergibt sich die Gleichung 6 \*x^2 -6 \*x -12 =0

mit den Lösungen -1 und 2.

x\_1 =-1

Berechnung der zugehörigen y-Werte: f(-1) =-6,5

Überprüfung, ob ein Wendepunkt vorliegt: f''(-1) =-18 \=0

Wendepunkte: W\_1(-1|-6,5)

Steigung der Wendetangenten: f(-1) =19

Wendetangenten: y =19 \*(x +1) -6,5; y =19 \*x +12,5

---

x\_2 =2

Berechnung der zugehörigen y-Werte: f(2) =10

Überprüfung, ob ein Wendepunkt vorliegt: f''(2) =18 \=0

Wendepunkte: W\_2(2|10)

Steigung der Wendetangenten: f(2) =-8

Wendetangenten: y =-8 \*(x -2) +10; y =-8 \*x +26

-----

|T|: Gleichung der Tangente t an der Stelle x\_0 an einen Funktionsgraphen: y =f'(x\_0) \*(x -x\_0) +y\_0

---

+++Beispiel 2.5: |B, D|

Wendepunkt oder nicht?

a.)

Untersuchen Sie die Potenzfunktion f mit f(x) =x^5 auf Wendepunkte.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f'(x) =5 \*x^4

f''(x) =20 \*x^3

f'''(x) =60 \*x^2

f^[4](x) =120 \*x

f^[5](x) =120 \=0 für alle x

f^[6](x) =0

f^[7](x) =0

...

Alle höheren Ableitungen sind gleich null.

Es gilt:

f''(0) =0 und somit ist der Punkt (0|0) möglicherweise ein Wendepunkt.

Da auch f'''(0) =0 ist, müssen die höheren Ableitungen untersucht werden.

Die erste von null verschiedene Ableitung an der Stelle x\_0 =0 ist fünfter (ungerader) Ordnung. Somit ist der Punkt W(0|0) ein Wendepunkt.

---

b.)

Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) =x^4 auf Wendepunkte.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f'(x) =4 \*x^3

f''(x) =12 \*x^2

f'''(x) =24 \*x

f^[4](x) =24

f^[5](x) =0

Es gilt:

f''(0) =0 und somit ist der Punkt (0|0) möglicherweise ein Wendepunkt.

Da auch f'''(0) =0 ist, müssen die höheren Ableitungen untersucht werden.

Die Funktion f mit f(x) =x^4 hat an der Stelle x =0 keinen Wendepunkt, da die erste von null verschiedene Ableitung f^[4](x) =24 gerade ist.

-----

j-59

##### Extrema

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Funktionen ist die Ermittlung von Extremwerten (Maxima und Minima) von besonderer Wichtigkeit.

Man unterscheidet dabei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.

-) Der Begriff relatives Extremum bezieht sich auf eine Umgebung von x\_0.

-) Der Begriff absolutes Extremum bezieht sich auf das gesamte Intervall I, in dem die Funktion untersucht wird.

In jedem relativen Extremum liegt eine waagrechte Tangente vor.

Daher können relative Extrema mithilfe der ersten Ableitung einfach berechnet werden. Eine Funktion kann mehrere relative Extrema haben.

+++Beispiel 2.6: |C|

Extrema

Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion f in der Randspalte ab, welche Extrema im Intervall I =[x\_0; x\_4] vorliegen.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lösung:

x\_0 Randstelle; Stelle eines Randmaximums; H\_1(x\_0|f(x\_0)) ist ein relativer Hochpunkt.

x\_1 Stelle des relativen Minimums; relativer Tiefpunkt T\_1(x\_1|f(x\_1))

x\_2 Stelle des relativen Maximums; relativer Hochpunkt H\_2(x\_2|f(x\_2))

x\_3 Stelle des absoluten Minimums; absoluter Tiefpunkt T\_2(x\_3|f(x\_3))

x\_4 Randstelle; Stelle des Randmaximums; Stelle des absoluten Maximums; H\_3(x\_4|f(x\_4)) ist der absolute Hochpunkt.

-----

##### Definition: Relatives Extremum

||Eine Funktion f hat an der Stelle x0 einen relativen Hochpunkt, wenn für alle x \*x\_0 in einer Umgebung U von x\_0 gilt: f(x) <f(x\_0)

x\_0 heißt Stelle des relativen Maximums.

f(x\_0) heißt relatives Maximum.

H(x\_0|f(x\_0)) heißt relativer Hochpunkt.

Eine Funktion f hat an der Stelle x\_0 einen relativen Tiefpunkt, wenn für alle x \*x\_0 in einer Umgebung U von x\_0 gilt: f(x) <f(x\_0)

x\_0 heißt Stelle des relativen Minimums.

f(x\_0) heißt relatives Minimum.

T(x\_0|f(x\_0)) heißt relativer Tiefpunkt.\||

---

##### Absolute Extrema

||-) Eine Funktion f hat an der Stelle x\_0 einen absoluten Hochpunkt, wenn im untersuchten Intervall gilt: f(x) <=f(x\_0)

-) Eine Funktion f hat an der Stelle x\_0 einen absoluten Tiefpunkt, wenn im untersuchten Intervall gilt: f(x) >=f(x\_0)

-) Absolute Extrema liegen entweder an der Stelle eines relativen Extremums oder am Rand des untersuchten Intervalls.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

|T|: Man unterscheidet:

x\_0 Extremstelle x-Wert des Extrempunktes

f(x\_0) Extremwert y-Wert des Extrempunktes

(x\_0|f(x\_0)) Extrempunkt

---

j-60

|T|: Ein Terrassenpunkt (oder Sattelpunkt) ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

+++Beispiel 2.7: |C, D|

Zusammenhänge zwischen f, f' und f'' an Extremstellen

Untersuchen Sie die drei gegebenen Funktionen auf ihre Extrema.

Beschreiben und vergleichen Sie das Verhalten von f' und f'' in der Umgebung der Extremstelle x\_0.

Lösung:

y =-x^2 +4x -2

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

Relatives Maximum;

waagrechte Tangente

f'(x\_0) =0

Steigung abnehmend

Rechtskrümmung

f''(x\_0) <0

---

y =x^2 -4x +2

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

Relatives Minimum;

waagrechte Tangente

f'(x\_0) =0 und

Steigung zunehmend

Linkskrümmung

f''(x\_0) >0

---

y =1/3 x^3 -2x^2 +4x -5/3

{{Grafik: Funktionsgraphen}}

Terrassenpunkt;

waagrechte Tangente

f'(x\_0) =0 und

Änderung des Krümmungsverhaltens

f''(x\_0) =0

-----

##### Satz: Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum

||x\_0 ist Stelle eines relativen Extremums von f -> f'(x\_0) =0\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Beachten Sie:

Die Umkehrung des letzten Satzes gilt im Allgemeinen nicht.

Aus f'(x\_0) =0 folgt nicht unbedingt, dass x0 eine Extremstelle ist.

Dies sieht man beispielsweise an der Funktion mit y =x^3.

Die Ableitung y' =3x^2 ist an der Stelle x\_0 =0 gleich null und die Funktion hat an der Stelle x\_0 auch eine waagrechte Tangente.

An der Stelle x\_0 =0 liegt aber kein Extremum vor.

An diesem Beispiel sieht man, dass f'(x\_0) =0 eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums ist.

j-61

##### Satz: Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum

f'(x\_0) =0 und f''(x\_0) <0 -> x\_0 ist Stelle eines relativen Maximums von f.

waagrechte Tangente und Rechtskrümmung

H(x\_0|f(x\_0)) relativer Hochpunkt

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f'(x\_0) =0 und f''(x\_0) <0 -> x\_0 ist Stelle eines relativen Minimums von f.

waagrechte Tangente und Linkskrümmung

T(x\_0|f(x\_0)) relativer Tiefpunkt

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

##### Ermittlung der Extremstellen einer Funktion

||-) In einem ersten Schritt werden alle Stellen mit waagrechter Tangente berechnet. Dazu wird die Gleichung f'(x) =0 gelöst.

-) Ist x\_0 eine Stelle mit waagrechter Tangente, wird mit f''(x\_0) die Art des Extremums ermittelt. Eine Extremstelle liegt vor, wenn f''(x\_0) \=0.

-) Für f''(x\_0) =0 müssen weitere Überlegungen (siehe Terrassenpunkt) angestellt werden.\||

---

##### Regeln zur Ermittlung der Extrema und Wendepunkte einer Funktion

||Die Funktion f sei dreimal differenzierbar;

x\_0 'el D ist die betrachtete Stelle.

f'(x\_0) =0 und f''(x\_0) <0: f hat an der Stelle x\_0 ein relatives Maximum.

f'(x\_0) =0 und f''(x\_0) <0: f hat an der Stelle x\_0 ein relatives Minimum.

f'(x\_0) =0 und f''(x\_0) =0: f hat an der Stelle x\_0 einen Terrassenpunkt, falls f'''(x\_0) \=0.

f''(x\_0) =0: f hat an der Stelle x\_0 einen Wendepunkt, falls f'''(x\_0) \=0.

Hat die Ableitungsfunktion f' an der Stelle x\_0 einen Extremwert, dann ist an dieser Stelle f''(x\_0) =0 und die Funktion f hat an dieser Stelle einen Wendepunkt.\||

---

|T|: Das Verhalten einer Funktion f kann durch

-) den Funktionswert f(x\_0),

-) die Tangentensteigung f'(x\_0) und

-) das Krümmungsverhalten f''(x\_0)

jeweils an der Stelle x\_0 beschrieben werden.

---

##### Randextrema

In Randextrema liegt in der Regel keine waagrechte Tangente vor.

Um Randextrema zu ermitteln, müssen die Punkte am Rand des untersuchten Intervalls zusätzlich untersucht werden.

j-62

##### Übungsaufgaben

+++2.008 |B, D|

Gegeben ist der Graph einer kubischen Polynomfunktion. Zeichnen Sie in den gegebenen Graphen Extrempunkte, Wendepunkt und Wendetangente.

Argumentieren Sie, welche der gegebenen Gleichungen die Gleichung der Wendetangente ist.

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

A: y =x/2

B: y =-x/2

C: y =2x

D: y =-2x

**[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

A: y =x +1/3

B: y =-x +1/3

C: y =x -1/3

D: y =-x -1/3

**[]**

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

A: y =x +2

B: y =-x +2

C: y =x -2

D: y =-x -2

**[]**

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

A: y =x +2/3

B: y =x -2/3

C: y =-x +2/3

D: y =-x -2/3

**[]**

-----

+++2.009 |B, D|

Berechnen Sie die Extrempunkte, die Wendepunkte und die Gleichungen der Wendetangenten der Funktion f mit der gegebenen Funktionsgleichung. Begründen Sie die Art des Extremums.

a.)

f(x) =x^2 -5 \*x +6

**[]**

---

b.)

f(x) =4 \*x -x^2

**[]**

---

c.)

f(x) =x^3 -6 \*x^2 +9 \*x

**[]**

---

d.)

f(x) =-x^3 +3 \*x^2 +24 \*x

**[]**

---

e.)

f(x) =x^3 -2 \*x^2 -7 \*x +14

**[]**

---

f.)

f(x) =(x^4)/(12) -(x^3)/6 -x^2 +2

**[]**

---

g.)

f(x) =3/(40) \*x^5 -x^3

**[]**

-----

##### Durchführung einer Funktionsdiskussion

Bei der Funktionsdiskussion (auch Kurvendiskussion) wird eine Funktion auf charakteristische Merkmale untersucht.

Dazu ist es üblich, in folgenden Schritten vorzugehen:

-) Ermitteln der Definitionsmenge D

-) Ermitteln von Polstellen und Lücken

-) Ermitteln der Asymptoten

-) Feststellen der Symmetrie bezüglich der Ordinatenachse oder des Koordinatenursprungs

-) Berechnen der Achsenschnittpunkte (Schnittpunkte mit der x-Achse und Schnittpunkt mit der y-Achse)

-) Berechnen der Extrempunkte (Hochpunkte H und Tiefpunkte T)

-) Berechnen der Wendepunkte W mit Wendetangenten t

-) Zeichnen des Graphen unter Einbeziehung der zuvor berechneten Bestimmungsstücke

Es ist aber auch möglich, nur Teile einer Kurvendiskussion zu erarbeiten.

|T|: Die Funktionsdiskussion ist eine gute Möglichkeit die Zusammenhänge zwischen f, f' und f'' zu studieren und Gelerntes zu festigen.

## !!2.1 Kurvendiskussion von Polynomfunktionen

Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen) f mit

f(x) =a\_n \*x^n +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0

(a\_j 'el 'R, a\_n \=0, n 'el 'N) sind auf 'R definiert, überall stetig und überall differenzierbar. Es gibt keine Polstellen, Lücken oder Asymptoten.

j-63

+++Beispiel 2.8: |B|

Funktionsdiskussion einer Polynomfunktion

Diskutieren Sie die Funktion f mit f(x) =x^3 +x^2 -x -1 und zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall [-2; 1,5].

Lösung:

f'(x) =3 \*x^2 +2 \*x -1

f''(x) =6 \*x +2

f'''(x) =6

Definitionsmenge D ='R

keine Polstellen; keine Asymptoten; keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte

Nullstellen: f(x) =0

x^3 +x^2 -x -1 =0

x^2 \*(x +1) -(x +1) =0

(x^2 -1) \*(x +1) =0

(x -1) \*(x +1)^2 =0

x -1 =0 oder (x +1)^2 =0

x =1

x =-1^(2)

N\_1(1|0)

N\_2(-1|0)

Doppellösung

Schnittpunkt mit der y-Achse: x =0 -> Y(0|-1)

Relative Extrema: f'(x) =0

3 \*x^2 +2 \*x -1 =0

x =1/3 oder x =-1

zugehörige y-Werte:

f(1/3) =-(32)/(27)

f(-1) =0

Krümmungsverhalten:

f''(1/3) =4 <0; Linkskrümmung

f''(-1) =-4 <0; Rechtskrümmung

Relative Extrempunkte:

T(1/3|-(23)/(27))

H(-1|0)

Randextrema für den Zeichenbereich:

f(-2) =-3

f(1,5) =3,125

Die Randpunkte P\_1(-2|-3) und P\_2(1,5|3,125) sind absolute Extrempunkte.

Wendepunkte: f''(x) =0

6 \*x +2 =0

x =-1/3

zugehöriger y-Wert:

f(-1/3) =-(16)/(27)

f''' =6 \=0 für alle x

W(-1/3|-(16)/(27))

Wendetangente:

k = f'(-1/3) =-4/3

t: y =-4/3 \*(x +1/3) -(16)/(27)

y =-4/3 x -(28)/(27)

Graph:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

|T|: Es ist günstig, den Grafikrechner über MODE auf vier Fixkommastellen einzustellen. Nullstellen und Extrema ermittelt man mit dem GTR über 2nd [CALC] mit 2:zero, 3:minimum und 4:maximum.

{{Grafik: Eingaben in GTR}}

Die Wendetangente erhalten Sie über 2nd [DRAW]5:Tangent.

Geben Sie als x-Wert -1/3 ein.

Mit dem GTR ermitteln Sie den Wendepunkt einer Funktion mithilfe des Extremums der ersten Ableitung.

Geben Sie im Funktionseditor Y\_2=nDeriv(Y\_1,X,X) ein, um die Ableitungsfunktion von Y\_1 zu zeichnen. Aus dem Extremum der Ableitungsfunktion erhalten Sie den x-Wert des Wendepunktes und die Steigung der Wendetangente.

j-64

|V|: Der Grad einer Polynomfunktion ist die höchste vorkommende Potenz der unabhängigen Variablen x im Funktionsterm.

##### Höchste Potenz beim Ableiten einer Potenzfunktion

||Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt:

Eine Gleichung n-ten Grades der Form a\_n \*x +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0 =0 hat höchstens n reelle Lösungen.

-) Eine Gleichung n-ten Grades mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Lösung.

-) Eine Gleichung n-ten Grades mit geradem Grad kann auch keine reelle Lösung haben.

Da beim Ableiten einer Potenzfunktion der Grad der Potenzfunktion um 1 vermindert wird, hat die erste Ableitung einer Polynomfunktion vom Grad n die höchste vorkommende Potenz n -1, die zweite Ableitung die höchste Potenz n -2.\||

---

##### Satz: Anzahl der Extrem- und Wendestellen einer Polynomfunktion

||Eine Polynomfunktion f mit a\_n \*x +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0 vom Grad n besitzt

-) maximal n Nullstellen,

-) maximal n -1 Extremstellen und

-) maximal n -2 Wendestellen.\||

---

+++Beispiel 2.9: |D|

Ableitungen, Extrema und Wendepunkte

Erklären Sie mithilfe der Differenzialrechnung und des Fundamentalsatzes der Algebra, warum eine

a.)

quadratische Funktion keinen Wendepunkt haben kann.

b.)

kubische Funktion genau einen Wendpunkt hat.

c.)

Funktion vierten Grades höchstens drei Extremstellen haben kann.

d.)

quadratische Funktion genau eine Extremstelle hat.

e.)

Funktion fünften Grades höchstens drei Wendepunkte haben kann.

Lösung:

a.)

Eine quadratische Funktion kann keinen Wendepunkt haben, weil die zweite Ableitung einer quadratischen Funktion eine Konstante ist.

Die zweite Ableitung kann deshalb keine Nullstelle haben.

---

b.)

Die zweite Ableitung einer kubischen Funktion ist linear.

Eine lineare Funktion hat genau eine Nullstelle.

Deshalb hat eine kubische Funktion genau einen Wendepunkt.

---

c.)

Die erste Ableitung einer Funktion vierten Grades ist kubisch.

Eine kubische Funktion hat höchstens drei Nullstellen.

Deshalb hat eine Funktion vierten Grades höchstens drei Extremstellen.

---

d.)

Die erste Ableitung einer quadratischen Funktion ist linear.

Eine lineare Funktion hat genau eine Nullstelle.

Deshalb hat eine quadratische Funktion genau eine Extremstelle.

---

e.)

Die zweite Ableitung einer Funktion fünften Grades ist kubisch.

Eine kubische Funktion hat höchstens drei Nullstellen.

Deshalb hat eine Funktion fünften Grades höchstens drei Wendepunkte.

-----

##### Übungsaufgaben

+++2.010 |B|

Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen.

a.)

f(x) =-1/4 x^2 +x +3

**[]**

---

b.)

f(x) =0,1x^2 +1

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^3)/(27)

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^3)/3 +x

**[]**

---

e.)

f(x) =(x^3)/6 +x^2

**[]**

---

f.)

f(x) =(x^3)/4 -3x

**[]**

---

g.)

f(x) =(x^4)/(12) +(x^3)/6 -x^2

**[]**

---

h.)

f(x) =(x^4)/(24) -x^2 +(16)/3

**[]**

-----

j-65

+++2.011 |A, B, C, D|

Die Grafik zeigt näherungsweise den Verlauf einer Skipiste.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

x horizontale Entfernung vom Anfang der Piste in Metern (m)

h(x) vertikale Höhe der Piste in Metern (m) bei der horizontalen Entfernung x

a.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Neigung der gesamten Skipiste in Prozent. Lesen Sie die dazu nötigen Daten aus der Grafik ab.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie jenen Punkt ein, an dem die Neigung der Piste am größten ist und bestimmen Sie an dieser Stelle den Neigungswinkel und die Neigung der Piste in Prozent.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, um welchen speziellen Punkt der dargestellten Funktion es sich beim in b) gezeichneten Punkt handelt.

Beschreiben Sie, wie man diesen Punkt berechnen kann.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, wie Sie bei gegebener Funktionsgleichung zeigen können, dass die Schipiste auf ihrer gesamten Länge (0 <=x <=500) streng monoton fallend ist.

**[]**

-----

+++2.012 |A, B, C, D|

Der Verlauf einer künstlich angelegten Schipiste wird näherungsweise durch die Funktion h mit h(x) =2,8 \*10^(-6) \*x^3 -1/(500) \*x^2 -1/(10) \*x +200 für x <=500 beschrieben.

{{Grafik: Schihalle in Bottrop}}

x horizontale Entfernung vom Anfang der Piste in Metern (m)

h(x) vertikale Höhe der Piste in Metern (m) bei der horizontalen Entfernung x

a.)

Zeichnen Sie den Graphen von h.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die Höhe des Anfangspunktes (Start) der Schipiste aus der Funktionsgleichung ab.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die Steigung und den Neigungswinkel der Schipiste am Start.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den Punkt, in dem die Piste am steilsten ist.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie die Steigung und den Neigungswinkel am steilsten Punkt der Piste.

**[]**

---

f.)

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem Punkt der Piste mit der größten Steigung und dem Wendepunkt des Graphen von h.

**[]**

---

g.)

Ermitteln Sie den Steigungswinkel der Piste beim Auslauf.

**[]**

---

h.)

Zeichnen Sie den Graphen der ersten Ableitung von h' und zeigen Sie damit, dass die Funktion h für alle x mit 0 <=x <=500 streng monoton fallend ist.

**[]**

-----

+++2.013 |A, B|

Der Verlauf der Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen wird näherungsweise durch die Funktion h mit h(x) =-0,08 \*x^2 +0,5 \*x +1,7 beschrieben.

x horizontale Entfernung vom Abstoßpunkt in Metern (m)

h(x) Höhe der Kugel in Metern (m) bei der horizontalen Entfernung x

a.)

Stellen Sie die Flugbahn der Kugel grafisch dar.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie aus der Funktionsgleichung die Abwurfhöhe der Kugel ab.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Abwurfwinkel.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die maximale Höhe der Flugbahn der Kugel.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

**[]**

---

f.)

Berechnen Sie den Winkel, mit dem die Kugel auf dem Boden auftrifft.

**[]**

-----

j-66

+++2.014 |A, B, C|

Die Höhe eines Flugzeugs beim Landeanflug lässt sich annähernd durch die Funktion h mit h(x) =0,0002 \*x^2 -0,1 \*x +12 beschreiben.

x horizontaler Abschnitt auf der Landebahn in Metern (m)

h(x) Höhe des Flugzeugs über der Landebahn in Metern (m)

a.)

Stellen Sie die Funktion h in einem geeigneten Intervall dar.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Höhenänderungsrate für die horizontalen Wegintervalle [0; 50] und [150; 200].

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Metern das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt.

Kontrollieren Sie das Ergebnis anhand des Graphen von f.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie, welchen Winkel die Flugbahn des Flugzeugs beim Aufsetzpunkt mit der Landebahn einschließt.

**[]**

---

e.)

Der Aufsetzwinkel sollte aus Sicherheitsgründen nicht größer als 3° sein. Berechnen Sie, wie hoch das Flugzeug noch über der Landebahn fliegt, wenn die Flugbahn mit diesem Winkel geneigt ist.

**[]**

-----

+++2.015 |A, C, D|

Durch den Einsatz von Düngemitteln auf Feldern kann der landwirtschaftliche Ertrag gesteigert werden. Der Ertrag lässt sich aber nicht beliebig steigern, sondern erreicht bei einem bestimmten Düngemitteleinsatz sein Maximum. Ein weiterer Düngereinsatz führt zu einem Ertragsrückgang und schließlich zur Bodenvergiftung.

Die Grafik zeigt den Ernteertrag E(x) in Zentner pro Hektar in Abhängigkeit vom Düngereinsatz x in kg/ha.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

1 Zentner =100 kg =1 dt

1 dt =1 Dezitonne

1 Hektar =1 ha =10000 m^2

a.)

Lesen Sie ab, wie hoch der Ertrag pro Hektar ist, wenn nicht gedüngt wird.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie jene Düngermenge ab, mit der der maximal mögliche Ertrag erreicht wird und bestimmen Sie diesen Ertrag.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, an welchem Punkt der Kurve der Ertragszuwachs maximal ist und zeichnen Sie diesen Punkt ein.

**[]**

---

d.)

Bestimmen Sie näherungsweise grafisch die Höhe des maximalen Ertragszuwachses.

**[]**

-----

+++2.016 |A, B, C, D|

Wenn eine Grippewelle ausbricht, kann man damit rechnen, dass t Wochen nach Ausbruch ein gewisser Prozentsatz p(t) der Bevölkerung erkrankt ist.

Für p gilt erfahrungsgemäß näherungsweise für eine bestimmte Region die Funktionsgleichung p(t) =0,05 \*(15 \*t^2 -t^3) für 1 <=t <=15.

a.)

Zeichnen und interpretieren Sie den Verlauf der Funktion im Definitionsintervall.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Wochen der Höhepunkt der Grippewelle erreicht ist und wie viel Prozent der Bevölkerung der Region dann erkrankt sind.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie, in welcher Woche der Zuwachs der Erkrankungen am größten ist. Wie hoch ist zu diesem Zeitpunkt der Zuwachs bei den Erkrankungen?

**[]**

---

d.)

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Zuwachs der Erkrankungen und dem Wendepunkt der Funktion p.

**[]**

---

e.)

Interpretieren Sie p'(12) =-3,6 im Sachzusammenhang.

**[]**

---

f.)

Ermitteln Sie rechnerisch oder grafisch, wann mit einem Ende der Grippewelle zu rechnen ist.

**[]**

-----

j-68

+++2.017 |A, B, D|

Eine gerade Bahnstrecke verläuft durch die Orte A und B. Wegen zu großer Lärmbelästigung soll um die Stadt S eine Umfahrung gebaut werden. Diese Umfahrungsstrecke geht durch den Ort R und mündet in A und B wieder tangential in die ursprüngliche Bahnstrecke ein.

Die Umfahrungsstrecke ist durch die Funktion f gegeben:

f(x) =-1/(12) \*x^4 +2/3 \*x^3 -4/3 \*x^2 -\*x +5 für 0 <=x <=4

Erstellen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B.

Zeigen Sie durch Berechnung, dass die Gerade g durch die Punkte A und B Tangente an die Funktion f ist.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

-----

## !!2.2 Umkehrung der Kurvendiskussion bei Polynomfunktionen

Mithilfe von gegebenen Punkten oder Eigenschaften einer Funktion soll die Gleichung dieser Funktion ermittelt werden. Dazu ist immer dieselbe Vorgangsweise empfohlen: Mithilfe der gegebenen Informationen wird zuerst ein Gleichungssystem erstellt, das dann gelöst wird.

Für rechenaufwändige Gleichungssysteme wird Technologieunterstützung zur Lösung des Gleichungssystems empfohlen.

In diesem Abschnitt werden nur ganzrationale Funktionen behandelt.

Für die eindeutige Lösung wird in der Regel eine Information mehr als die höchste Potenz der ganzrationalen Funktion benötigt.

+++Beispiel 2.10: |A, B|

Ermitteln einer quadratischen Funktion

Ermitteln Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion f, deren Graph durch den Punkt P(0|2) geht und der im Punkt H(1|4) ein Extremum aufweist.

Setzen Sie f mit f(x) =a \*x^2 +b \*x +c an und berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lösung:

f(x) =a \*x^2 +b \*x +c

f'(x) =2 \*a \*x +b

Durch Verwendung der gegebenen Eigenschaften erhalten Sie ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die drei gesuchten Koeffizienten a, b und c:

(1) P(0|2) liegt auf dem Graphen von f:

f(0) =2 --> a \*0^2 +b \*0 +c =2 -> c =2

(2) H(1|4) liegt auf dem Graphen von f:

f(1) =4 --> a \*12 +b \*1 +c =4

(3) H(1|4) ist Extremum der Funktion:

f'(1) =0 --> 2 \*a \*1 +b =0

Das Gleichungssystem wird gelöst: c =2 in (2) einsetzen:

a +b =2 | \*(-1)

2a +b =0

a =-2

b =4

Die Funktionsgleichung lautet somit: f(x) =-2 \*x^2 +4 \*x +2

Durch Zeichnen des Graphen der Funktion f können Sie überprüfen, ob dieser die vorgegebenen Eigenschaften hat.

j-68

+++Beispiel 2.11: |A, B|

Ermitteln einer Funktion dritten Grades

Der Graph einer kubischen Funktion f verläuft durch den Punkt A(0|2).

Die Wendetangente im Punkt B(1|3) hat die Steigung 1/2.

a.)

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.

---

b.)

Berechnen Sie die Funktionsgleichung von f.

---

c.)

Berechnen Sie den Anstieg der Tangente im Punkt A.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lösung:

a.)

Setzen Sie f mit f(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d an.

Sie benötigen 4 Informationen, um daraus ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen zu erstellen.

f(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d

f'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

f''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

Gleichungssystem:

(1) A(0|2) liegt auf dem Graphen von f:

f(0) =2 --> 2 =a \*0^3 +b \*0^2 +c \*0 +d

(2) B(1|3) liegt auf dem Graphen von f:

f(1) =3 --> 3 =a \*1^3 +b \*1^2 +c \*1 +d

(3) Wendepunkt an der Stelle x =1:

f''(1) =0 --> 0 =6a \*1 +2b

(4) Die Steigung der Wendetangente

an der Stelle x =1 ist gleich 1

f'(1) =1/2 --> 1/2 =3a \*1^2 +2b \*1 +c

---

b.)

Lösen des Gleichungssystems mit Technologie:

(1) d =2

(2) a +b +c +d =3

(3) 6a +2b =0

(4) 3a +2b +c =1/2

A =

'mat[4; 5]

([0; 0; 0; 1; 2]

[1; 1; 1; 1; 3]

[6; 2; 0; 0, 0]

[3; 2; 1; 0; 1/2])

rref(A) =

'mat[4; 5]

([1; 0; 0; 0; 1/2]

[0; 1; 0; 0; -3/2]

[0; 0; 1; 0; 2]

[0; 0; 0; 1; 2])

(1') a =1/2

(2') b =-3/2

(3') c =2

(4') d =2

Lösung des Gleichungssystems mithilfe von Matrizen:

{{Grafik: Lösung mit Matrizen in der Technologie nicht übertragen}}

Funktionsgleichung: f(x) =(x^3)/2 -(3x^2)/2 +2x +2

Lösung mit GeoGebra:

{{Grafik: Lösung mit GeoGebra; Funktionsgraph}}

Lösung des Gleichungssystems mithilfe von GeoGebra:

Definieren Sie die kubische Funktion f.

Erstellen Sie mit den angegebenen Bedingungen die einzelnen linearen Gleichungen.

Dadurch werden auch die jeweiligen einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems angegeben.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit

Löse[{$2, $3, $4, $5}, {a, b, c, d}].

---

c.)

Ableitung: f'(x) =(3x^2)/2 -3x +2

f'(0) =2

Die Tangente an die Kurve im Punkt Y(0|2) hat den Anstieg 2. Der Graph der Funktion f zeigt die gewünschten Eigenschaften.

-----

j-69

+++Beispiel 2.12: |A, B|

Verbindung von Leitungen

Beim Bau einer Fernwärmeleitung ist ein Baufehler passiert.

Zwei Leitungsstücke, die verbunden werden müssen, treffen nicht aufeinander. Um den Fehler zu beheben, sollen die zwei geraden und parallelen Teilstücke (siehe Skizze) zwischen den Punkten A und B ohne Knick verbunden werden.

Die Verbindungskurve zwischen den beiden geraden Leitungsteilen entspricht einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.

Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion.

{{Grafik: Skizze der Leitung; Funktionsgraph}}

Lösung:

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen Sie ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkt A an.

f(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d

f'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

f''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

Erstellen und Lösen des Gleichungssystems:

f(0) =0 --> d =0

f'(0) =0 --> c =0

f(4) =2 --> 64 \*a +16 \*b +4 \*c +d =2

f'(4) =0 --> 48 \*a +8 \*b +c =0

48 \*a +8 \*b =0

-32 \*a =2

a =-1/(16)

b =3/8

f(x) =-1/(16) \*x^3 +3/8 \*x^2

---

Mit Matrizen:

A =

'mat[4; 5]

([0; 0; 0; 1; 0]

[0; 0; 1; 0; 0]

[64; 16; 4; 1; 2]

[48; 8; 1; 0; 0])

rref(A) =

'mat[4; 5]

([1; 0; 0; 0, -1/(16)]

[0; 1; 0; 0; 3/8]

[0; 0; 1; 0; 0]

[0; 0; 0; 1; 0])

-----

##### Übersetzungsregeln zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

||Formulierung im Text: A(a|b) liegt auf dem Graphen der Funktion. Der Graph der Funktion f verläuft durch A(a|b).

mathematisches Modell: f(a) =b

---

Formulierung im Text: Die Funktion schneidet die x-Achse bei x =a. Die Funktion hat eine Nullstelle N(a|0).

mathematisches Modell: f(a) =0

---

Formulierung im Text: Die Funktion f hat im Punkt E(a|b) ein Extremum. --> E(a|b) liegt auch auf dem Graphen von f.

mathematisches Modell: f(a) =b und f'(a) =0

---

Formulierung im Text: Die Funktion f hat an der Stelle x =a ein Extremum.

mathematisches Modell: f'(a) =0

---

Formulierung im Text: Die Funktion f hat im Punkt W(a|b) einen Wendepunkt. --> W(a|b) liegt auch auf dem Graphen von f.

mathematisches Modell: f(a) =b und f''(a) =0

---

Formulierung im Text: Die Funktion f hat einen Wendepunkt an der Stelle x =a.

mathematisches Modell: f''(a) =0

---

Formulierung im Text: Die Funktion f hat an der Stelle x =a die Steigung k.

mathematisches Modell: f'(a) =k

---

Formulierung im Text: Die Funktion f ist an der Stelle x =a parallel zur Geraden g mit y =k \*x +d. (k ist die Steigung der Gerade) Die Funktion f ist an der Stelle x =a mit einem Winkel 'al gegen die x-Achse geneigt.

mathematisches Modell: f'(a) =k

k ='tan('al)\||

---

Die Tabelle zeigt die in diesem Buch in den Aufgabestellungen am häufigsten vorkommenden Formulierungen und dazu eine Hilfe zur mathematischen Umsetzung für die Erstellung des Gleichungssystems.

j-70

##### Übersetzungsregeln zur Bestimmung von Funktionsgleichungen (Fortsetzung)

||Formulierung im Text: Die Funktion f berührt an der Stelle x =a die Gerade g mit y =k \*x +d. --> Die Gerade g ist Tangente mit dem Berührpunkt T(a|k \*a +d).

Die Funktion f hat an der Stelle x =a die Wendetangente t mit y =k \*x +d. --> W(a|k \*a +d) ist Wendepunkt.

mathematisches Modell: f(a) =k \*a +d und f'(a) =k

---

Formulierung im Text: Die Funktion f berührt an der Stelle x =a die x-Achse. An der Stelle x =a liegt eine Nullstelle und ein Extremum vor.

mathematisches Modell: f(a) =0 und f'(a) =0

---

Formulierung im Text: Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse.

mathematisches Modell: Alle Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x sind null.\||

---

##### Übungsaufgaben

+++2.018 |A, B|

Vergleichen Sie mit Übungsaufgabe 2.007.

Erstellen und skizzieren Sie die Polynomfunktion mit dem niedrigsten Grad, so dass gilt:

a.)

f(1) =3,

f'(1) =1,

f''(1) =0,5

**[]**

---

b.)

f(-1) =0,

f'(-1) =-1,

f''(-1) =0,5

**[]**

---

c.)

f(-2) =-1,

f'(-2) =0,

f''(-2) =-1,5

**[]**

---

d.)

f(3) =1,

f'(3) =0,

f''(3) =0,5

**[]**

-----

|!|: Schreiben Sie bei der Ermittlung der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion durch ein Gleichungssystem vor jeder Gleichung die Information, die zur Berechnung verwendet wurde.

+++2.019 |A, B, D|

Ermitteln Sie die Polynomfunktion mit dem niedrigsten Grad für die dargestellten Graphen und begründen Sie Ihre Vorgangsweise:

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

-----

+++2.020 |A, B, C|

a.)

Ermitteln Sie die Zuordnungsvorschrift einer kubischen Funktion f, deren Graph durch die Punkte (0|5), (1|5), (-1|11) geht und im Punkt (0|5) die Steigung -2 hat. Erklären Sie Ihre Rechenschritte.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die Polynomfunktion dritten Grades, deren Graph durch die Punkte A(-2|-10), B(-1|-2) und C(1|2) verläuft und die im Punkt C die Steigung 4 hat. Erklären Sie Ihre Rechenschritte.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Winkel, den die Tangente im Punkt P(1|y0) der Parabel mit der Gleichung f(x) =x^4 +a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d mit der positiven Abszissenachse einschließt. Die Parabel schneidet an den Stellen -2, -1, 0 und 3 die Abszissenachse.

Erklären Sie Ihre Rechenschritte.

**[]**

-----

+++2.021 |A, B, D|

Der Graph einer kubischen Parabel geht durch den Punkt P(0|2) und hat im Punkt Q(3|4) einen Extremwert und bei x =-5 einen Wendepunkt.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

Fertigen Sie eine Skizze.

**[]**

-----

+++2.022 |A, B, D|

Eine kubische Parabel soll bei x =-1 die x-Achse schneiden, bei x =0 mit 45° ansteigen und bei x =1 ein Extremum mit y =4 erreichen.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

Machen Sie eine Skizze.

**[]**

-----

j-71

|!|: Schreiben Sie bei der Ermittlung der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion durch ein Gleichungssystem vor jeder Gleichung die Information, die zur Berechnung verwendet wurde.

+++2.023 |A, B, D|

Eine symmetrische Funktion vierten Grades hat die allgemeine Gleichung

f(x) =a \*x^4 +b \*x^2 +c.

Sie schneidet die x-Achse bei x =1 und ist an dieser Stelle mit einem Winkel 'al =99,4623° gegen die x-Achse geneigt.

An der Stelle x =0 berührt die Funktion die Gerade y =4.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

Machen Sie eine Skizze.

**[]**

---

+++2.024 |A, B, D|

Eine Funktion dritten Grades hat im Punkt A(1|5) ein relatives Maximum. Im Punkt B(2|3) liegt ein Wendepunkt vor.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

**[]**

-----

+++2.025 |A, B, D|

Eine kubische Parabel, die durch den Ursprung geht, hat im Punkt (-2|1) eine Wendetangente, die mit 45° fällt.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

**[]**

-----

+++2.026 |A, B, D|

Eine Funktion dritten Grades mit f(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d geht durch den Punkt A(-3|-1). Sie hat in B(1|1) einen Wendepunkt und in C(3|y) eine horizontale Tangente.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

**[]**

-----

+++2.027 |A, B, D|

Eine Funktion 3. Grades hat an der Stelle x =1 eine Nullstelle.

Die Tangente an die Funktion an der Stelle x =1 schneidet die x-Achse mit dem Winkel 'al =104,0362°.

Am Schnittpunkt mit der y-Achse ist die Funktion parallel zur Geraden g mit y =2 \*x +5. Der Punkt A(-2|39) liegt auf der Funktion.

Erstellen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

Machen Sie eine Skizze.

**[]**

-----

+++2.028 |A, B|

Ein Brückenbogen kann durch eine quadratische Funktion h mit h(x) =a \*x^2 +b \*x +c beschrieben werden.

Die Höhe des Bogens ist in der Brückenmitte bei x =60 m maximal mit h =40 m.

Legen Sie das Koordinatensystem so, dass ein Sockel des Brückenbogens im Ursprung liegt. (siehe Skizze in der Randspalte)

{{Grafik: Skizze}}

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion h des Brückenbogens.

**[]**

-----

+++2.029 |A, B|

Die Flugbahn eines Golfballs lässt sich, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird, näherungsweise durch eine Parabel h mit h(x) =a \*x^2 +b \*x +c beschreiben. 40 m horizontal vom Abschlag entfernt erreicht der Ball den Scheitel seiner Flugbahn.

Die Scheitelhöhe der Flugbahn beträgt 8 m.

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel.

{{Grafik: Skizze; Funktionsgraph}}

**[]**

-----

+++2.030 |A, B|

Der Verlauf eines Wasserstrahls kann durch eine Parabel h mit h(x) =a \*x^2 +b \*x +c beschrieben werden.

Der im Bild in der Randspalte dargestellte Wasserstrahl hat eine horizontale Reichweite von 1,0 m.

Der Scheitelpunkt des Wasserstrahls liegt bei einer horizontalen Entfernung von der Austrittsdüse von 0,5 m in einer Höhe von 0,8 m.

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, die den Verlauf des Wasserstrahls beschreibt.

{{Grafik: nicht übertragen}}

**[]**

-----

j-72

+++2.031 |A, B, C, D|

Ein Golfball wird über einen ebenen Platz geschlagen.

Die Flugbahn des Golfballs kann ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

h(x) =a \*(0,5 \*x -0,008 \*x^2)

x horizontale Entfernung vom Abschlagpunkt in Metern (m)

h(x) Höhe des Golfballs in Metern (m) bei der horizontalen

Entfernung x

a.)

Erklären Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf die Flugbahn des Golfballs hat.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Flugweite des Golfballs.

Erklären Sie, warum aus rein mathematischen Überlegungen, im vorliegenden Modell, die Flugweite des Golfballs unabhängig von a ist.

**[]**

---

c.)

Die Flugbahn des Golfballs erreicht eine maximale Höhe von 3 m. Die horizontale Entfernung des Scheitelpunktes vom Abschlagpunkt entspricht der Hälfte der Flugweite. Ermitteln Sie den Wert von a.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie, in welchem Winkel der Golfball abgeschlagen wurde.

**[]**

---

e.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h für a =0,5.

**[]**

-----

+++2.032 |A, B|

Der Bahnhof Zweigstett, der an einer schnurgeraden Bahnstrecke liegt, soll A B einen neuen Bahnsteig bekommen. 300 Meter vor Beginn des neuen Bahnsteigs soll die abzweigende Weiche liegen. Die Gleismitten sollen im Bahnhof einen Abstand von 10 Metern haben.

Wie muss die Abzweigung geführt werden, damit die Schienen richtig gebogen werden können.

{{Grafik: Skizze

(aus: Partoll et al, Mathe macchiato Analysis, Pearson Verlag 2010)}}

"Mathe macchiato Analysis" ist ein sehr erfolgreicher Mathematikkurs für Schüler und Studenten, in dem die Differenzialrechnung spannend und unterhaltsam durch Cartoons vermittelt wird.

**[]**

-----

|!|: Schreiben Sie bei der Ermittlung der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion durch ein Gleichungssystem vor jeder Gleichung die Information, die zur Berechnung verwendet wurde.

+++2.033 |A, B, C, D|

Beim Bau einer Eisenbahntrasse müssen zwei gerade Schienenstücke in den A B beiden Punkten A und B verbunden werden, wie die Skizzen (1), (2) und (3) zeigen. Dies soll so geschehen, dass die Trasse keinen "Knick" macht, d. h., dass die erste Ableitung des eingepassten Schienenstücks in den Verbindungspunkten A und B mit den geraden Schienenstücken übereinstimmt.

a.)

Erstellen Sie die einfachste Polynomfunktion, die diese Bedingung erfüllt.

Lesen Sie die benötigten Informationen aus den gegebenen Grafiken ab.

{{Grafik: nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie die Polynomfunktion, die den Verlauf des eingepassten Schienenstücks beschreibt, wenn zusätzlich auch noch verlangt wird, dass die Krümmung in den Verbindungspunkten mit der Krümmung der geraden Schienenstücke übereinstimmen soll, d. h., dass die zweite Ableitung in den Verbindungspunkten gleich null ist.

Begründen Sie Ihre Vorgangsweise.

**[]**

-----

j-73

1 t =1000 kg

1 ha =100 a =10000 m^2

+++2.034 |A, B, C, D|

Durch den Einsatz von Dünger auf Feldern kann der landwirtschaftliche Ertrag gesteigert werden. Der Ertrag lässt sich aber nicht beliebig steigern, sondern erreicht bei einem bestimmten Düngemitteleinsatz sein Maximum. Ein weiterer Düngereinsatz führt zu einem Ertragsrückgang und schließlich zur Bodenvergiftung.

Der Zusammenhang zwischen dem Ernteertrag und dem Düngereinsatz lässt sich für ein landwirtschaftliches Produkt näherungsweise durch eine kubische Funktion E mit E(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d beschreiben.

x Düngereinsatz in Kilogramm pro Hektar (kg/ha)

E(x) Ernteertrag in Tonnen pro Hektar (t/ha) beim Düngereinsatz x

Im Koordinatensystem ist dieser Zusammenhang zwischen Ernteertrag E

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie ab, wie hoch der Ertrag pro Hektar ist, wenn nicht gedüngt wird.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie jene Düngermenge ab, bei der der Ertrag maximal ist. Schreiben Sie den maximalen Ertrag und die dafür benötigte Düngermenge an.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie weitere geeignete Punkte und Eigenschaften der Funktion E ab. Erstellen Sie mithilfe dieser Informationen ein Gleichungssystem, mit dem Sie den Ernteertrag E(x) in Abhängigkeit vom Düngereinsatz x berechnen können.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Funktionsgleichung von E.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Ernteertrag, ausgehend vom ungedüngten Feld, durch Düngung maximal steigern lässt.

**[]**

---

f.)

Ermitteln Sie, bei welcher Düngermenge der Ertragszuwachs am größten ist.

Wie hoch ist bei dieser Düngermenge der Ertragszuwachs?

**[]**

---

g.)

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Zuwachs des Ernteertrages und dem Wendepunkt der Funktion E.

**[]**

---

h.)

Am Wendepunkt gilt E'(x) =0,015 t/kg.

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

**[]**

---

i.)

Ermitteln Sie die Düngermenge, die zu einem Nullertrag führt.

**[]**

-----

+++2.035 |A, B|

Die Flugbahn eines Golfballs lässt sich, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird, näherungsweise durch eine Parabel h mit h(x) =a \*x^2 +b \*x +c beschreiben. Der Golfball wird 80 m weit geschlagen und erreicht eine maximale Höhe von 8 m.

Berechnen Sie den x-Wert des Scheitelpunktes der Flugbahn.

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel.

**[]**

-----

+++2.036 |A, B|

Eine gerade Bahnstrecke verläuft durch die Orte A und B. Wegen zu großer Lärmbelästigung soll um die Stadt S eine Umfahrung gebaut werden. Diese Umfahrungsstrecke geht durch den Ort R(1|3) und mündet in A und B wieder tangential in die ursprüngliche Bahnstrecke.

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f (Umfahrungsstrecke), wenn diese durch ein Polynom vierten Grades gegeben ist.

{{Grafik: Bahnstrecke nicht übertragen}}

j-74

+++2.037 |A, B, C, D|

Aufsprungbahn der Bergisel-Sprungschanze:

{{Grafik: Aufsprungbahn der Bergisel-Sprungschanze

(Quelle: Physik des Schispringens, Uni Graz)}}

Die Bergisel-Sprungschanze ist einer der Austragungsorte der Vierschanzentournee. Die Schanze wurde von der iranisch-britischen Architektin

Zaha Hadid geplant (1950 -2016).

Die Aufsprungbahn (blau) ist der Bereich der Sprungschanze, in dem normalerweise das Aufsetzen des Schispringers erfolgt. Die Aufsprungbahn ist zuerst rechtsgekrümmt und nach dem Punkt K zum Auslauf hin linksgekrümmt. Der Punkt, in dem der Übergang der beiden Krümmungen erfolgt, wird als K-Punkt (Konstruktionspunkt) bezeichnet.

Wird dieser K-Punkt vom Schispringer übersprungen, erfolgt der Aufsprung am flacher werdenden Hang und ist schwieriger zu stehen.

Die Bergisel-Sprungschanze hat folgende charakteristische Werte:

s =4 m (Schanzentischhöhe)

h =60 m (Höhendifferenz zwischen Schanzentischkante und K-Punkt)

n =103 m (Horizontaldistanz zwischen Schanzentischkante und K-Punkt)

'be =34,34° (Neigungswinkel im K-Punkt)

a.)

Modellieren Sie die Aufsprungbahn durch ein kubisches Polynom f. Legen Sie den Koordinatenursprung in die Schanzentischkante.

**[]**

---

b.)

Argumentieren Sie, warum die Aufsprungbahn im Punkt K am steilsten ist.

**[]**

---

c.)

Kreuzen Sie die wahren Aussagen bezüglich der Aufsprungbahn an:

**[]** A: Der K-Punkt ist ein Sattelpunkt.

**[]** B: Der K-Punkt ist der Wendepunkt der Funktion f.

**[]** C: Am K-Punkt gilt: f(x) <0

**[]** D: Am K-Punkt gilt: f'(x) <0

**[]** E: Am K-Punkt gilt: f''(x) <0

**[]** F: Am K-Punkt gilt: |f'(x)| ist maximal.

**[]** G: Am K-Punkt ändert sich die Krümmung des Graphen der Funktion f.

-----

+++2.038 |D|

Argumentieren Sie, welche der Punkte A, B, C, D, E, F und G aus dem nebenstehenden Graphen folgende Bedingungen erfüllen.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

f(x) <0 'u f'(x) <0

**[]**

---

b.)

f(x) <0 'u f'(x) <0

**[]**

---

c.)

f(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

d.)

f(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

e.)

f'(x) =0 'u f''(x) <0

**[]**

---

f.)

f'(x) =0 'u f''(x) <0

**[]**

---

g.)

f'(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

h.)

f'(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

-----

+++2.039 |C, D|

Interpretieren Sie die angegebenen Bedingungen, ordnen Sie die Punkte A, B, C, D, E, F und G aus dem nebenstehenden Graphen folgenden Bedingungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

f(x) <0 'u f'(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

b.)

f(x) <0 'u f'(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

c.)

f(x) <0 'u f '(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

d.)

f(x) <0 'u f'(x) <0 'u f''(x) <0

**[]**

---

e.)

f(x) <0 'u f'(x) =0 'u f''(x) <0

**[]**

---

f.)

f(x) <0 'u f'(x) =0 'u f''(x) <0

**[]**

---

g.)

f(x) =0 'u f'(x) =0 'u f''(x) =0

**[]**

-----

j-75

## !!2.3 Bewegungsaufgaben

### !!2.3.1 Geschwindigkeit

Die Steigung einer linearen Weg-Zeit-Funktion ist gleich der Geschwindigkeit des bewegten Körpers.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall ist gleich dem Differenzenquotient der Weg-Zeitfunktion in diesem Intervall.

---

+++Beispiel 2.13: |B, C, D|

Mittlere Geschwindigkeit

Helmut fährt mit dem Fahrrad von seinem Heimatort Arnreit ins ca. 13 km entfernte Kirchberg ob der Donau, wo er sich eine Stunde nach Fahrtbeginn mit seinem Freund trifft. Das Weg-Zeit-Diagramm zeigt den Verlauf dieser Fahrt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus dem Graphen ab, wie lange Helmut in den ersten 40 Minuten seiner Fahrt gerastet hat.

---

b.)

Erklären Sie, wie man aus dem Graphen erkennen kann, in welchem Zeitintervall Helmut am schnellsten gefahren ist.

---

c.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 10], [10; 15], [15; 30] und [30; 40].

---

d.)

Zeichnen Sie ein passendes Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

---

e.)

Helmut fährt die letzten 6 Kilometer der Strecke mit annähernd konstanter Geschwindigkeit von 24 km/h.

Zeichnen Sie diesen Streckenabschnitt in das Diagramm ein.

Lesen Sie aus Ihrer Grafik ab, wie lange Helmut nach seiner Ankunft auf seinen pünktlich eintreffenden Freund warten muss.

---

{{Lösung auf Seite 75 und78}}

Lösung:

a.)

In der Zeit, in der Helmut rastet, legt er keinen Weg zurück.

Im Weg-Zeit-Diagramm wird das durch Streckenstücke, die parallel zur Zeitachse verlaufen, dargestellt.

Helmut rastet nach einer 10-minütigen Fahrt das erste Mal rund 5 Minuten und 30 Minuten nach Fahrtbeginn noch einmal 10 Minuten.

Insgesamt rastet er 15 Minuten.

---

b.)

Die Steigung der Streckenstücke wird durch Helmuts Geschwindigkeit bestimmt. Je steiler die Gerade ist, umso höher ist seine Geschwindigkeit.

Helmut ist in den ersten 10 Minuten am schnellsten gefahren.

---

c.)

Die durchschnittlichen Geschwindigkeiten werden mithilfe des Differenzenquotienten für das jeweilige Streckenstück berechnet.

[0; 10]: v =(3 -0)/(10 -0) km/min =3/(10) \*60 km/h =18 km/h

[10; 15]: v =(3 -3)/(15 -10) km/min =0 km/h

[15; 30]: v =(7 -3)/(30 -15) km/min =4/15 \*60 km/h =16 km/h

[30; 40]: v =(7 -7)/(40 -30) km/min =0 km/h

---

j-76

d.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

e.)

v =24 km/h =(24)/(60) km/min =2/5 km/min

Die Steigung des weiteren Streckenverlaufs beträgt 2/5.

Man zeichnet das entsprechende Steigungsdreieck ein und zieht die Strecke bis zum Schnittpunkt mit der Gitterlinie für 13 km.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Helmut muss nach seiner Ankunft 5 Minuten auf seinen Freund warten.

-----

+++Beispiel 2.14: |B|

Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit

Der freie Fall als ein Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung erfolgt nach der Weg-Zeit-Funktion mit s(t) =g/2 \*t^2, wobei g =9,81 m/(s^2) die Erdbeschleunigung, s der zurückgelegte Weg in Metern und t die Zeit in Sekunden ist.

Man rundet: g ~~10 m/(s^2), dann gilt vereinfacht: s(t) =5 t^2

t in s: 0

s in m: 0

t in s: 1

s in m: 5

t in s: 2

s in m: 20

t in s: 3

s in m: 45

t in s: 4

s in m: 80

t in s: 5

s in m: 125

t in s: 6

s in m: 180

{{Grafik: t in s: 3 auf t in s: 5; 'De t =2

s in m: 45 auf s in m: 125; 'De s =80}}

a.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit v eines frei fallenden Körpers im Zeitintervall [3; 5].

---

b.)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des fallenden Körpers zum Zeitpunkt t\_0 =3 s.

---

{{Lösung auf Seite 76 und 77}}

Lösung:

a.)

In diesem Zeitintervall [3; 5] legt der fallende Körper 'De s =s(5) -s(3) =125 -45 =80, also 80 m zurück.

Bezogen auf dieses Zeitintervall erhält man:

v^- =('De s)/('De t) =(s(5) -s(3))/(5 -3) =(80)/2, also 40 m/s

---

j-77

b.)

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t\_0 =3 s erhält man durch Verkleinerung der Zeitdifferenz:

{{Tabelle aufgelöst}}

Intervall [3; t]: [3; 5]

Zeitdifferenz 'De t in s: 2

Wegdifferenz 'De s in m: 80

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in m/s: 40

---

Intervall [3; t]: [3; 4]

Zeitdifferenz 'De t in s: 1

Wegdifferenz 'De s in m: 35

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in m/s: 35

---

Intervall [3; t]: [3; 3,1]

Zeitdifferenz 'De t in s: 0,1

Wegdifferenz 'De s in m: 3,05

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in m/s: 30,5

---

Intervall [3; t]: [3; 3,01]

Zeitdifferenz 'De t in s: 0,01

Wegdifferenz 'De s in m: 0,3005

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in m/s: 30,05

---

Intervall [3; t]: t -> 3

Zeitdifferenz 'De t in s: 'De t -> 0

Wegdifferenz 'De s in m: 'De s -> 0

mittlere Geschwindigkeit ('De s)/('De t) in m/s: ('De s)/('De t) -> 30

---

Die mittlere Geschwindigkeit nähert sich im Intervall [3; 3 +'De t] für immer kleinere Zeitdifferenzen 'De t der Geschwindigkeit 30 m/s.

Dieser Grenzwert ist die Momentangeschwindigkeit nach 3 Sekunden.

-----

##### Definition: Momentangeschwindigkeit

||Existiert für jede beliebige Nullfolge von Zeitintervallen 'De t der Grenzwert 'lim['De t -> 0]((s(t\_0 +'De t) -s(t\_0))/('De t) =('ds)/('dt)(t\_0) =v(t\_0)

so heißt dieser Grenzwert Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t\_0.\||

---

|T|: Bei gleichförmigen Bewegungen (Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit) ist die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt t\_0.

+++Beispiel 2.14: |B|

Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit (Forts.)

Man erhält als Ableitung der Weg-Zeit-Funktion des freien Falls mit s(t) =5 \*t^2 die Funktion der (Momentan-)Geschwindigkeit v(t) =('ds(t))/('dt) =10 \*t-

v(1) =10 m/s: Ein frei fallender Körper hat nach 1 s die Geschwindigkeit 10 m/s.

v(2) =20 m/s: Ein frei fallender Körper hat nach 2 s die Geschwindigkeit 20 m/s.

-----

Die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t\_0 entspricht der Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Funktion zu diesem Zeitpunkt.

|!|: Umrechnung zwischen m/s und km/h:

v in m/s \*3,6 =v in km/h

v in km/h /3,6 =v in m/s

+++Beispiel 2.15: |B|

Auffahrunfall

Ein Auffahrunfall soll durch einen freien Fall "simuliert" werden.

Berechnen Sie, aus welcher Höhe ein Körper frei fallen muss, damit er eine Geschwindigkeit von a) 36 km/h und b) 72 km/h erreicht.

Lösung:

a.)

36 km/h entsprechen 10 m/s.

Diese Geschwindigkeit erreicht ein frei fallender Körper nach 1 s, da:

v(t) =10 \*t

10 =10 \*t

t =1

s(1) =5 \*1^2 =5

Ein frei fallender Körper erreicht bei einer Fallhöhe von 5 Metern eine Geschwindigkeit von 10 m/s.

Ein Auffahrunfall mit 36 km/h entspricht einem freien Fall aus 5 Metern Höhe.

---

b.)

72 km/h entsprechen 20 m/s.

Diese Geschwindigkeit erreicht ein frei fallender Körper nach 2 Sekunden, da:

v(t) =10 \*t

20 =10 \*t

t =2

s(2) =5 \*2^2 =20

Ein frei fallender Körper erreicht bei einer Fallhöhe von 20 Metern eine Geschwindigkeit von 20 m/s.

Ein Auffahrunfall mit 72 km/h entspricht einem freien Fall aus 20 Metern Höhe.

-----

j-78

+++Beispiel 2.16: |A, B, D|

Aufprallgeschwindigkeit beim freien Fall

a.)

Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h, aus der ein Körper frei fallen muss, damit er die Aufprallgeschwindigkeit v (in m/s) erreicht.

---

b.)

Erklären Sie, um das Wievielfache sich die Fallhöhe erhöhen muss, wenn sich die Aufprallgeschwindigkeit verdoppelt.

---

|T|: Eine Verdoppelung der Geschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Fallhöhe.

Lösung:

a.)

h(t) =g/2 \*t^2

v(t) =('dh(t))/('dt) =('d)/('dt)(g/2 \*t^2) =g \*t und damit ist t =v/g

h(v) =g/2 \*(v^2)/(g^2) =(v^2)/(2 \*g) ~~(v^2)/(20)

---

b.)

Die Geschwindigkeit tritt in der Formel im Quadrat auf. Die Fallhöhe wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Doppelte Geschwindigkeit bedeutet daher vierfache Fallhöhe.

-----

+++Beispiel 2.17: |A, B, C|

Freier Fall

Ein Stein wird von einer 130 m hohen Brücke fallen gelassen.

Im Weg-Zeit-Diagramm in der Randspalte ist die Fallbewegung des Steins dargestellt.

{{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm}}

a.)

Lesen Sie aus der Grafik ab, in welcher Höhe über dem Boden sich der Stein nach 3 Sekunden befindet.

---

b.)

Ermitteln Sie grafisch die Momentangeschwindigkeit des Steins nach 3 Sekunden. Die Funktion h mit h(t) =130 -5 \*t^2 beschreibt die Fallbewegung des Steins.

t Fallzeit in Sekunden (s)

h(t) Höhe in Metern (m) über dem Erdboden nach t Sekunden Fallzeit

---

c.)

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis aus b) rechnerisch.

---

d.)

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Stein am Erdboden aufprallt.

---

Lösung:

a.)

Nach 3 Sekunden ist der Stein 85 m über dem Boden.

---

b.)

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 Sekunden entspricht der Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Funktion an der Stelle t =3.

Die Geschwindigkeit beträgt -30 m/s.

(Das negative Vorzeichen gibt an, dass der Stein fällt.)

---

c.)

h(3) =130 -5 \*3^2 =85

v(t) =('dh(t))/('dt) =-10 \*t

v(3) =-30 m/s

---

d.)

Zum Zeitpunkt des Aufpralls befindet sich der Stein 0 m über dem Boden.

130 -5 \*t^2 =0

t ='w(26) =5,099...

v(5,1) =-51 m/s

Der Stein prallt nach ca. 5,1 Sekunden mit ca. 51 m/s am Boden auf.

-----

j-79

##### Lotrechter Wurf

Bei einem lotrechten Wurf überlagern sich eine gleichförmige Bewegung nach oben und eine freie Fallbewegung nach unten. Die Höhe des geworfenen Gegenstandes in Metern lässt sich durch die Funktion h mit

h(t) =h\_0 +v\_0 \*t -g/2 \*t^2 beschreiben.

t Zeit nach Abwurf in Sekunden (s)

h(t) Höhe in Metern (m) über dem Boden t Sekunden nach dem Abwurf

g Erdbeschleunigung in m/(s^2), g ~~10 m/(s^2)

v\_0 Anfangsgeschwindigkeit in m/s

h\_0 Anfangshöhe in m

---

+++Beispiel 2.18: |A, B, C, D|

Lotrechter Wurf

Ein Tennisball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 15 m/s von einer Anfangshöhe 1 Meter lotrecht nach oben geschlagen.

Nach t Sekunden hat er die Höhe h(t) =1 +15 \*t -5 \*t^2 erreicht.

a.)

Stellen Sie den Graphen der Funktion h in einem geeigneten Zeitintervall dar.

---

b.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit des Balls in der zweiten Sekunde. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Grafik.

c.)

Berechnen Sie die Funktion v, die für jeden Zeitpunkt t die Momentangeschwindigkeit des Balles angibt. Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.

---

d.)

Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit des Balles zu den Zeitpunkten t =0 s, t =1 s und t =2 s.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

---

e.)

Lesen Sie aus dem Graphen von h ab, wann der Ball seine größte Höhe erreicht. Erklären Sie, wie groß seine Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt sein muss.

---

f.)

Berechnen Sie, wann der Tennisball wieder auf dem Boden aufschlägt.

---

g.)

Erklären Sie, wie man die Aufprallgeschwindigkeit des Balls aus dem Graphen von h bestimmen kann.

---

h.)

Berechnen Sie die Aufprallgeschwindigkeit des Balls.

---

{{Lösung auf Seite 79 und 80}}

Lösung:

a.)

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

Die zweite Sekunde ist das Zeitintervall [1; 2].

v^- =('De h)/('De t) =(h(2) -h(1))/(2 -1) =(11 -11)/1 =0

Im Mittel hat der Tennisball im Intervall [1; 2] die Geschwindigkeit 0 m/s. Er befindet sich am Anfang und am Ende des Zeitintervalls auf derselben Höhe.

---

c.)

v(t) =('dh(t)/('dt) =-10 \*t +15

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

d.)

v(0) =15 m/s Anfangsgeschwindigkeit

v(1) =5 m/s Der Tennisball steigt nach 1 Sekunde noch mit der Geschwindigkeit 5 m/s.

v(2) =-5 m/s Der Tennisball fällt nach 2 Sekunden mit der Geschwindigkeit 5 m/s.

---

e.)

Der Ball erreicht nach 1,5 Sekunden seine größte Höhe.

Die Funktion h hat an dieser Stelle ihr Maximum.

Da die Geschwindigkeit gleich der ersten Ableitung der Funktion h ist, muss sie zu diesem Zeitpunkt gleich null sein.

---

j-80

|T|: Der freie Fall ist ein Spezialfall des lotrechten Wurfs für v\_0 =0 m/s.

---

f.)

h(t) =0 <--> -5 \*t^2 +15 \*t +1 =0

<--> t\_(1, 2) =(-15 +-'w(15^4 -4 \*(-5) \*1)/(-10)

<--> t\_1 ~~2,065; (t\_2 ~~-0,065)

Nach etwa 3,07 s schlägt der Tennisball wieder auf dem Boden auf. g) Die Aufprallgeschwindigkeit ist gleich der Steigung der Tangente an die Funktion h zum Aufprallzeitpunkt.

---

h.)

v(3,07) =-10 \*3,07 +15 =-15,7

Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt 15,7 m/s.

-----

### !!2.3.2 Beschleunigung

+++Beispiel 2.19: |A, B|

Beschleunigung eines frei fallenden Körpers

Die Momentangeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ist gegeben durch

v(t) ~~10 \*t. Berechnen Sie die Beschleunigung des Körpers.

Die (mittlere) Beschleunigung ist der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit. Für das Zeitintervall [3; 5] erhalten Sie

('De v)/('De t) =(v(5 -v(3))/(5 -3) =(50 -30)/2, also 10 m/(s^2).

Durch Übergang zu immer kleineren Werten 'De t und zugehörigen Geschwindigkeitsänderungen 'De v erhalten Sie die Momentanbeschleunigung.

-----

|T|: Beim freien Fall handelt es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant.

---

##### Definition: Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t\_0

||Existiert für jede beliebige Nullfolge von 'De t der Grenzwert

'lim['De t -> 0]((v(t\_0 +'De t) -v(t\_0)/('De t) =('dv)/('dt)(t\_0) =a(t\_0),

so heißt dieser Grenzwert Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t\_0.\||

---

Für den freien Fall gilt: a(t) ~~10 m/(s^2)

+++Beispiel 2.20: |A, B, C, D|

Radfahrer

Ein Radfahrer fährt auf einer Teststrecke 16 Sekunden lang.

Die Fahrt kann durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben werden. s(t) =4/5 \*t^2 -(t^3)/(30)

t Zeit in Sekunden

s(t) zurückgelegte Strecke in Metern nach t Sekunden

a.)

Stellen Sie die Weg-Zeit-Funktion grafisch dar.

---

b.)

Beschreiben Sie mithilfe des Graphen, wie sich die Geschwindigkeit während der Fahrt verändert.

---

c.)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v.

Stellen Sie sie grafisch dar.

---

d.)

Lesen Sie aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ab, wann die Geschwindigkeit maximal ist und in welchem Zeitintervall die Geschwindigkeit größer als 5 m/s ist.

---

e.)

Erklären Sie, in welchem Punkt der Weg-Zeit-Funktion die Geschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Punkt, sowie die maximale Geschwindigkeit in km/h.

---

f.)

Argumentieren Sie anhand des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms, wie sich die Beschleunigung während der Fahrt ändert.

---

g.)

Berechnen Sie die Beschleunigung-Zeit-Funktion.

Stellen Sie diese grafisch dar.

---

{{Lösung auf Seite 81}}

j-81

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung, also der 1. Ableitung der Weg-Zeit-Funktion.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t =0 ist null. In den ersten 8 Sekunden nimmt die Geschwindigkeit zu, danach nimmt sie ab und ist am Ende der Fahrt wieder gleich null.

c.)

v(t) =('ds(t))/('dt) =8/5 \*t -(t^2)/(10)

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

Die maximale Geschwindigkeit wird nach 8 Sekunden erreicht. In der Zeit von ca. 4,2 Sekunden bis 11,8 Sekunden fährt er schneller als 5 m/s.

---

e.)

Im Maximum der Geschwindigkeitsfunktion gilt: ('dv(t\_0))/('dt) =0

Da v(t) =('ds(t)/('dt) ist, gilt an dieser Stelle: ((d^2 s(t\_0))/('dt) =0

Die Geschwindigkeit ist im Wendepunkt der Weg-Zeit-Funktion maximal.

('d^2s)/('dt^2)(t) =8/5 -t/5 =0

8 =t

s(8) =4/5 \*8^2 -(8^3)/(39) =34,133... ~~34

W(8|34)

v(8) =8/5 \*8 (8^2)/(10) =6,4

Die maximale Geschwindigkeit beträgt 6,4 m/s -23,04 km/h.

---

f.)

Die Beschleunigung entspricht der Steigung der Geschwindigkeitsfunktion.

Sie hat den größten Wert zum Zeitpunkt Null und ist in den ersten 8 Sekunden der Fahrt positiv (Die Geschwindigkeit nimmt zu). Zum Zeitpunkt 8 Sekunden ist die Beschleunigung gleich null.

Danach ist die Beschleunigung negativ (Die Geschwindigkeit nimmt ab).

---

g.)

a(t) =8/5) -t/5

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: nicht übertragen}}

-----

+++Beispiel 2.21: |A, B, C|

Anhalteweg

Ein Auto fährt mit 10 m/s durch ein Wohngebiet. Plötzlich sieht der Fahrer einige Meter vor ihm einen Ball auf die Straße rollen. Er beginnt zu bremsen.

Im Weg-Zeit-Diagramm ist der Weg s in Metern, den das Auto vom Erkennen des Balls bis zu seinem Stillstand zurücklegt, in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Interpretieren Sie den Graphen in Bezug auf die Geschwindigkeitsänderung des Autos.

---

b.)

Zeichnen Sie das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

---

c.)

Bestimmen Sie grafisch mithilfe des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms die Bremsbeschleunigung des Autos.

---

{{Lösung auf Seite 82}}

j-82

Lösung:

a.)

Das Auto fährt ca. 1 Sekunde mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Diese Zeit braucht der Fahrer vom Erkennen der Gefahr, bis er auf die Bremse steigt.

Danach verringert sich die Geschwindigkeit des Autos gleichmäßig.

Nach c. 2,6 Sekunden steht es still.

---

b.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

c.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

Pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um ca. 6 m/s ab.

Bremsbeschleunigung a ~~-6 m/(s^2)

-----

Anhalteweg

s =v\_0 \*t\_R +1/2 \*a \*t\_B^2

v\_0 Ausgangsgeschwindigkeit in m/s

t\_R Reaktionszeit in Sekunden (meist 1 Sekunde)

a Betrag der Bremsbeschleunigung in m/(s^2)

t Bremszeit in Sekunden

---

##### Reaktionsweg, Bremsweg, Anhalteweg

||Der Anhalteweg eines Fahrzeugs setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen.

Der Reaktionsweg ist jener Weg, den das Fahrzeug in der Zeit zurücklegt, die der Fahrer Vom Wahrnehmen einer Gefahr bis zum Betätigen der Bremse benötigt. Während dieser Reaktionszeit (im Allgemeinen 1 Sekunde) fährt das Auto ungebremst, mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Der Bremsweg ist jener Weg, den das Fahrzeug während des Bremsvorgangs zurücklegt. Im Idealfall erfolgt dieser Vorgang mit konstanter Bremsbeschleunigung, also gleichmäßig beschleunigt.\||

---

+++Beispiel 2.22:

Anhalteweg (Fortsetzung)

a.) Berechnen Sie den Anhalteweg des Fahrzeugs.

Nehmen Sie an, der Fahrer braucht eine Reaktionszeit Von 1 Sekunde und das Fahrzeug bremst mit -6 m/(s^2).

---

b.)

Erklären Sie, ob eine Verdoppelung der Ausgangsgeschwindigkeit v\_0 eine Verdoppelung des Anhaltewegs zur Folge hat.

---

{{Lösung auf Seite 82 und 83}}

Lösung:

a.)

v =10 m/s,

a =|-6| m/(s^2) =6 m/(s^2)

Reaktionsweg =10 \*1 =10

Bremszeit t: a =v/t und daher t =v/a =10/6 =1,6^. ~~1,67

Bremsweg =1/2 \*6 \*1,67^2 ~~8,4

Der Anhalteweg beträgt ca. 10 m +8,4 m =18,4 m.

---

j-83

b.)

Eine Verdopplung der Geschwindigkeit v\_0 bewirkt eine Verdopplung des Reaktionswegs v\_0 \*t\_R.

Die Bremszeit t\_B wird ebenfalls verdoppelt. Das hat aber eine Vergrößerung des Bremsweges um das Vierfache zur Folge, da dieser mit der Bremszeit zum Quadrat zunimmt.

Der Anhalteweg wird bei einer Verdopplung der Ausgangsgeschwindigkeit mehr als doppelt so lang.

-----

|T|: Reaktionsweg s\_R =v\_0 \*v\_R

Bremsweg s\_B =1/2 \*a \*t\_B^2

Anhalteweg s =s\_R +s\_B

---

##### Übungsaufgaben

+++2.040 |B, D|

In der Grafik ist der Verlauf einer Radtour vereinfacht dargestellt.

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie ohne zu rechnen aus dem Graphen ab, in welchem Zeitabschnitt der Radfahrer am schnellsten gefahren ist.

Erklären Sie, woran man dies erkennen kann.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit für die Zeitabschnitte [0; 10], [10; 40] und [40; 50].

Erstellen Sie ein passendes Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die durchschnittlich gefahrene Geschwindigkeit für die ersten 40 Minuten.

**[]**

---

d.)

Im Zeitintervall [50; 80] fährt der Radfahrer mit durchschnittlich 25 km/h. Vervollständigen Sie das Weg-Zeit-Diagramm.

**[]**

-----

+++2.041 |A, C, D|

Die Grafik beschreibt die Höhe eines zu Boden fallenden Steins.

t Zeit in Sekunden

h(t) Höhe des Steins über dem Boden in Metern zum Zeitpunkt t

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus der Grafik ab, aus welcher Höhe der Stein fällt.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie grafisch die mittlere Geschwindigkeit des Steins innerhalb der ersten Sekunde in m/s.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie grafisch die Momentangeschwindigkeit des Steins zum Zeitpunkt 1 Sekunde.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, wie man bei gegebener Funktionsgleichung von h die Aufprallgeschwindigkeit des Steins berechnen kann.

**[]**

-----

j-83

+++2.042 Das Bild in der Randspalte zeigt das Weg-Zeit-Diagramm (Weg in m, Zeit in s) eines Pkws im Stadtverkehr zwischen zwei Ampeln.

{{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

Die ungleichförmige Bewegung besteht aus vier Abschnitten:

-) [0; 8] Anfahren

-) [8; 14] gleichförmige Bewegung

-) [14; 18] Bremsen

-) [18; 24] Stillstand.

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit

a.)

für das Zeitintervall [0; 18],

**[]**

---

b.)

beim Bremsvorgang und

**[]**

---

c.)

bei der gleichförmigen Bewegung.

**[]**

---

d.)

Kreuzen Sie das dazu passende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm an. Setzen Sie dabei voraus, dass sowohl das Anfahren als auch das Bremsen mit konstanter Beschleunigung erfolgt.

**[]** {{Grafik: nicht übertragen}}

**[]** {{Grafik: nicht übertragen}}

**[]** {{Grafik: nicht übertragen}}

-----

+++2.043 |A, B|

Die beim freien Fall zurückgelegte Stecke s in Metern kann ungefähr mit Hilfe der Funktionsgleichung s(t) =5 \*t^2 beschrieben werden. (t in Sekunden).

Berechnen Sie, aus welcher Höhe man einen Körper fallen lassen muss, damit er mit einer Geschwindigkeit von 54 km/h am Boden aufprallt.

**[]**

-----

+++2.044 |A, B, C, D|

Lässt man einen Stein vom Schiefen Turm von Pisa fallen, kann seine Höhe h über dem Boden näherungsweise durch eine quadratische Funktion mit h(t) =50 -5 \*t^2 (h in m, t in s) beschrieben werden.

{{Grafik: Legendärer Fallversuch von Galilei vom Schiefen Turm in Pisa.}}

a.)

Zeichnen Sie den Graphen von h in einem geeigneten Bereich.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des fallenden Steins innerhalb der zweiten Sekunde.

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe des Graphen von h.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie aus der Grafik ab, nach welcher Zeit der Stein 10 m über dem Boden ist. Bestimmen Sie grafisch die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion.

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Stein am Boden aufprallt.

**[]**

---

e.)

Zeichnen Sie das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

Zeigen Sie anhand des Graphen, dass die Beschleunigung beim freien Fall ca. 10 m/s2 beträgt.

**[]**

-----

j-85

Beim Bungee-Jumping lässt sich eine Person an einem Gummiseil befestigt in die Tiefe fallen. Bis zum Zeitpunkt, an dem sich das Seil spannt und den Springer bremst, befindet er sich in einem freien Fall.

a.)

Toni springt von der 192 m hohen Europabrücke an einem 50 m langen Gummiseil befestigt in die Tiefe.

Berechnen Sie, welche Momentangeschwindigkeit (in km/h) er hat, wenn das Seil spannt und der freie Fall gebremst wird.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit von Toni bis zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

---

c.)

Lisa behauptet, bei einem Sprung eine Geschwindigkeit von 180 km/h erreicht zu haben.

Berechnen Sie, wie lange das Seil sein müsste, um diese Geschwindigkeit erreichen zu können.

**[]**

-----

+++2.046 |A, D|

Ein Gegenstand wird lotrecht nach oben geworfen. Seine Höhe über dem Boden wird durch die Gleichung h(t) =h\_0 +v\_0 \*t -5 \*t^2 beschrieben.

t Zeit in Sekunden

h(t) Höhe in m nach t Sekunden

h\_0 Anfangshöhe in m

v\_0 Anfangsgeschwindigkeit in m/s

g Erdbeschleunigung in m/(s^2)

a.)

Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung jenes Zeitpunkts, zu dem das Wurfgeschoß seine maximale Höhe erreicht.

**[]**

---

b.)

Erklären Sie, ob der Zeitpunkt, zu dem die maximale Höhe erreicht wird, von der Abwurfhöhe h\_0 abhängig ist.

**[]**

-----

+++2.047 |A, C|

Ein Ball wird von einer Brücke lotrecht nach oben geworfen.

Seine Höhe (in m) über dem Erdboden nach t Sekunden ist gegeben durch h(t) =12 +15 \*t -5 \*t^2.

|T|: Für die Höhe bei einem lotrechten Wurf gilt: h(t) =h\_0 +v\_0 \*t -g/2 \*t^2

t Zeit in Sekunden

h(t) Höhe über dem Boden in

m nach t Sekunden h0 Anfangshöhe in m

v\_0 Anfangsgeschwindigkeit in m/s

g Erdbeschleunigung in m/(s^2)

---

a.)

Lesen Sie aus der Funktionsgleichung ab, wie hoch die Brücke über dem Boden ist.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Ball nach oben geworfen wird.

**[]**

---

c.)

Zeichnen Sie den Graphen von h.

Erklären Sie anhand des Graphen von h, warum die Momentangeschwindigkeit des Balls an der höchsten Stelle seiner Flugbahn gleich null sein muss.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion.

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Ball am Boden aufprallt.

**[]**

-----

+++1.048 |A, C|

Martin fährt mit seinem Auto mit 130 km/h auf der Autobahn.

Die Straßenverkehrsordnung schreibt einen 2-Sekundenabstand vor, d. h., merkt man sich einen besonderen Punkt am Straßenrand, den das Heck des voran fahrenden Fahrzeuges gerade passiert, dann darf das eigene Auto diesen Punkt erst nach 2 Sekunden erreichen.

Berechnen Sie, wie groß der geforderte Abstand ist, den Martin einhalten muss.

**[]**

-----

j-86

+++2.049 |A, C|

Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm beschreibt die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges während einer Vollbremsung.

{{Grafik: Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

|T|: Anhalteweg

s =v\_0 \*t\_R +1/2 \*a \*t\_B^2

v\_0 Ausgangsgeschwindigkeit in m/s

t\_R Reaktionszeit in Sekunden (meist 1 Sekunde)

a Betrag der Bremsbeschleunigung in m/(s^2)

t\_B Bremszeit in Sekunden

---

a.)

Lesen Sie aus dem Diagramm die Ausgangsgeschwindigkeit v\_0 des Bremsvorgangs, die vom Fahrer benötigte Reaktionszeit t\_R und die Bremszeit t\_B ab.

Bestimmen Sie grafisch die Bremsbeschleunigung des Fahrzeuges.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie mithilfe der Formel in der Randspalte den Anhalteweg.

**[]**

---

c.)

Kreuzen Sie das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm an.

**[]**

-----

+++2.050 Ein Sportwagen, der in einem Zeitintervall von 40 Sekunden zwischen zwei Ampeln beschleunigt und wieder abbremst, bewegt sich annähernd nach der Weg-Zeit-Funktion s(t) =t^2 -(t^3)/(60) (s in m, t in s, 0 <=t <=40).

t Zeit in Sekunden (s)

s(t) zurückgelegter Weg in Metern (m) nach t Sekunden

a.)

Berechnen Sie die Strecke, die zwischen den Ampeln liegt.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm.

**[]**

---

c.)

Beschreiben Sie mithilfe des Weg-Zeit-Diagramms, wie sich die Geschwindigkeit des Sportwagens während der Fahrt verändert.

Lesen Sie insbesondere ab, zu welchem Zeitpunkt der Wagen die höchste Geschwindigkeit erreicht.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion. Berechnen Sie mit deren Hilfe die maximale Geschwindigkeit des Wagens in km/h.

**[]**

---

e.)

Zeichnen Sie das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

Lesen Sie daraus ab, in welchem Zeitintervall der Sportwagen schneller als 54 km/h fährt.

**[]**

---

f.)

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit und die durchschnittliche Beschleunigung für das Zeitintervall aus e).

**[]**

---

g.)

Zeichnen Sie das Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

**[]**

-----

j-87

+++2.051 |A, C|

Die vier Weg-Zeit-Diagramme zeigen jeweils einen Ausschnitt einer Autofahrt.

Fahrt: **[]** {{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Weg-Zeit-Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Ordnen Sie die richtige Beschreibung der jeweiligen Fahrt zu.

{{ZI: Schreibe den richtigen Buchstaben in die Eingabemarke beim Weg-Zeit-Daigramm.}}

A: Ein Auto beschleunigt gleichmäßig und bremst anschließend

gleichmäßig bis zum Stillstand. Danach bleibt es stehen.

B: Ein Auto fährt kurze Zeit mit konstanter Geschwindigkeit. Es bremst gleichmäßig ab und beschleunigt schließlich wieder gleichmäßig.

C: Ein Auto beschleunigt gleichmäßig, fährt kurze Zeit mit konstanter Geschwindigkeit und bremst anschließend wieder gleichmäßig ab.

D: Ein Auto fährt kurze Zeit mit konstanter Geschwindigkeit. Es bremst gleichmäßig bis zum Stillstand ab und bleibt stehen.

---

b.)

Die vier Graphen zeigen die zu den gegebenen Weg-Zeit-Diagrammen jeweils passenden Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen.

Ordnen Sie die Diagramme richtig zu.

Fahrt: **[]** {{Grafik: Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nicht übertragen}}

Fahrt: **[]** {{Grafik: Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nicht übertragen}}

j-88

##### Ziele erreicht?

+++Z 2.1

Der Verlauf einer Grippewelle in einer Region lässt sich angenähert durch

eine kubische Funktion E mit E(t) =a \*t^3 +b \*t^2 +c \*t +d beschreiben. t Zeit seit Ausbruch der Grippewelle in Wochen E(t) Anzahl der Erkrankten in Tausend t Wochen nach Ausbruch der Grippewelle Statistische Auswertungen ergeben folgende Informationen:

(I) Zu Beginn der Grippewelle waren ca. 1000 Personen infiziert.

(II) Nach einer Woche waren bereits ca. 10000 Personen infiziert.

(III) Nach 10 Wochen waren ca. 80000 Personen infiziert.

(IV) Nach ca. 3 Wochen nimmt die Anzahl der Infizierten am stärksten zu.

(V) Nach 10 Wochen erreicht die Grippewelle ihr Maximum.

a.)

Zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt.

Schreiben Sie an, welche der angegebenen Informationen zum Erstellen der jeweiligen Gleichung verwendet wurden.

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung.

{{Tabelle aufgelöst}}

Gleichung: a +b +c +d =10

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: 300 \*a +20 \*b +c =0

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: 1000a +100b +10c +d =80

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: d =1

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

b.)

Berechnen Sie aus dem in a) gegebenen Gleichungssystem die Werte von a, b, c und d.

Schreiben Sie die Gleichung der Funktion E an.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Wert von (E(10) -E(0))/(10 -0).

Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d) Kreuzen Sie die Aussage(n) an, die den Ausdruck (E(10) -E(0))/(10 -0) korrekt interpretieren.

**[]** A: Der Ausdruck beschreibt die Anzahl der Neuerkrankten in Tausend nach 10 Wochen.

**[]** B: Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in Tausend innerhalb der ersten 10 Wochen.

**[]** C: Der Ausdruck beschreibt die prozentuelle Änderung der Anzahl der Erkrankten in Tausend innerhalb der ersten 10 Wochen.

**[]** D: Der Ausdruck beschreibt die Zunahme der Anzahl der Erkrankten in Tausend in den ersten 10 Wochen.

**[]** E: Der Ausdruck beschreibt die momentane Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in Tausend nach 10 Wochen.

---

e.)

Kreuzen Sie die Aussage(n) an, die zur Berechnung einer degressiven {{ZI: degressiv: Steigung nimmt ab}} Zunahme der erkrankten Personen notwendig sind.

**[]** A: ('d^2 E(t))/('dt^2) <0

**[]** B: ('d^2 E(t))/('dt^2) >0

**[]** C: ('dE(t))/('dt) =0

**[]** D: ('dE(t))/('dt) <0

**[]** E: E(t) >0 und ('dE(t))/('dt) <0

-----

j-89

+++Z 2.2 |C|

Zwei geradlinige Rohre (Rohr 1 und Rohr 2) werden durch ein gekrümmtes C Rohr verbunden. Die Form des gekrümmten Rohres (rot) kann durch eine Funktion f modelliert werden (siehe Grafik in der Randspalte).

{{Grafik: nicht übertragen}}

An den Anschlusspunkten A und B sollen die geradlinigen Rohre ohne Knick in das gekrümmte Rohr übergehen.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile, sodass eine korrekte Antwort entsteht.

{{ZI: Kreuze die richtige Antwort an. Die Antworten stehen bereits in der Textlücke.}}

Damit das gekrümmte Rohr im Anschlusspunkt A ohne Knick in das gerade Rohr 1 übergeht, muss **[]** f(-2) =2 / **[]** f(2) =-2 / **[]** f(3) =5 und **[]** f'(-2) <0 / **[]** f'(-2) =1 / **[]** f'(3) =0 sein.

-----

+++Z 2.3 |A, B, C, D|

Das Vordach einer Veranstaltungshalle besteht aus einer Metallplatte.

Die Kurve der Seitenansicht des Vordaches entspricht einer ganzrationalen

Funktion f dritten Grades mit f(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Für die Konstruktion des Vordaches liegen folgende Informationen vor:

(I) Die Metallplatte ist auf einer Seite im Punkt A in der Mauer verankert.

(II) Die Metallplatte ist im Punkt A waagrecht.

(III) Im Punkt B liegt die Platte lose auf einem Stahlträger auf.

Die horizontale Entfernung der Punkte A und B beträgt 6 Meter. Aufgrund des hohen Eigengewichtes biegt sich die Metallplatte durch.

(IV) Der maximale Durchhang befindet sich in einer horizontalen Entfernung von 40 Dezimeter (dm) von der Mauer (Punkt A).

(V) In einer horizontalen Entfernung von 4 Metern vom Punkt A beträgt der maximale Durchhang 1 dm.

Nehmen Sie zur Vereinfachung der Rechnung, ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkt A an.

a.)

Zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung.

{{Tabelle aufgelöst}}

Gleichung: d =0

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: 64000 \*a +1600 \*b +40 \*c +d =-1

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: 4800 \*a +80 \*b +c =0

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

Gleichung: c =0

Verwendete Information: **[]**

Zusammenhang: **[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Gleichung der Funktion f.

**[]**

-----

j-90

+++Z 2.4 |A, B, C, D|

Die Hafenstadt A und der Zentralbahnhof B im Landesinneren eines Inselstaates sind durch eine nahezu geradlinig verlaufende Straße miteinander verbunden. Am bisher verkehrstechnisch nicht erschlossenen Ort C werden große Rohstoffreserven entdeckt, die in naher Zukunft abgebaut werden sollen. Man benötigt daher eine Straße von C zum Hafen. Man möchte diese Verbindung in die bereits vorhandene Straße einbinden.

Zur Planung wird nebenstehendes Koordinatensystem festgelegt.

Die zu bauende Straße kann näherungsweise durch eine Polynomfunktion f 4. Grades mit f(x) =a \*x^4 +b \*x^3 +c \*x^2 +d \*x +e beschrieben werden.

Aus geologischen Gründen muss der nördlichste Punkt der Verbindung (=Extrempunkt der Funktion) D sein. Die Straße mündet an der Stelle x =-2,3 tangential in die bereits bestehende Verbindung von A nach B ein.

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie die Funktionsgleichung für die bestehende, geradlinige Straße aus der Grafik ab.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten von f.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die Gleichung von f. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

**[]**

-----

+++Z 2.5 |A, B, C, D|

Die Abbildung zeigt zwei Graphen einer Ableitungsfunktion f'.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen bezüglich der jeweiligen Funktion f an.

Graph A {{Grafik: nicht übertragen}}

Graph B {{Grafik: nicht übertragen}}

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =0 eine Extremstelle.

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =0 einen Wendepunkt.

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist im Intervall [-2; -1] streng monoton wachsend.

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =1 einen Wendepunkt.

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist für alle x 'el 'R streng monoton wachsend.

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist im Intervall [-2; 1] rechtsgekrümmt. (d. h. im gegebenen Intervall gilt: f''(x) <0)

Graph A: **[]**

Graph B: **[]**

-----

j-91

+++Z 2.6 |D|

Skizzieren Sie eine

a.)

Skizzieren Sie eine steigende kubische Funktion, die keine Extremstellen besitzt.

**[]**

---

b.)

Skizzieren Sie eine fallende kubische Funktion, die einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente besitzt.

**[]**

---

c.)

Skizzieren Sie eine kubische Funktion, die im ersten Quadranten den Tiefpunkt und im zweiten Quadranten den Hochpunkt besitzt.

**[]**

---

d.)

Skizzieren Sie eine kubische Funktion, die im vierten Quadranten den Tiefpunkt und im zweiten Quadranten den Hochpunkt besitzt.

**[]**

---

e.)

Skizzieren Sie eine kubische Funktion, die im ersten Quadranten den Hochpunkt und im zweiten Quadranten den Tiefpunkt besitzt.

**[]**

-----

+++Z 2.7 |A, B, C, D|

Die Grafik in der Randspalte zeigt die Weg-Zeit-Funktion s einer U-Bahn zwischen zwei Haltestellen.

{{Grafik: Weg-Zeit-Funktion nicht übertragen}}

a.)

Zeigen Sie grafisch, dass die momentane Geschwindigkeit der U-Bahn 10 Sekunden nach ihrer Abfahrt ungefähr gleich hoch ist wie jene nach 50 Sekunden Fahrt.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 50 Sekunden aus der Grafik ab. Geben Sie die Geschwindigkeit in km/h an.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit in km/h für die gesamte Fahrt.

**[]**

---

Während der letzten 22 Sekunden ihrer Fahrt bremst die U-Bahn. Der dabei zurückgelegte Weg kann mit der Funktion s beschrieben werden:

s(t) =21 \*t -0,475 \*t^2

t Zeit des Bremsvorgangs in Sekunden

s(t) nach t Sekunden zurückgelegter Bremsweg in Metern

---

d.)

Berechnen Sie, welche Strecke die U-Bahn während des Bremsvorgangs zurücklegt.

**[]**

---

e.)

Erstellen Sie die Gleichung der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der U-Bahn in km/h beim Start des Bremsvorgangs.

**[]**

---

f.)

Begründen Sie anhand der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion, warum die Bremsbeschleunigung der U-Bahn -0,95 m/(s^2) beträgt.

**[]**

-----

j-92

# !!3 Weitere Ableitungsregeln und Anwendungen

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) mithilfe der Ketten-, Produkt- und Quotientenregel, Potenz- und Polynomfunktionen sowie Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktion und Winkelfunktionen ableiten,

-) Ableitungsfunktionen zur Beschreibung von Sachverhalten aus unterschiedlichen Themengebieten einsetzen sowie lokale Änderungsraten berechnen und interpretieren.\||

---

Die Überlegungen, Sätze und Definitionen aus dem Kapitel "Eigenschaften von Polynomfunktionen" werden sinngemäß verallgemeinert und gelten auch für alle in diesem Kapitel behandelten Funktionen.

## !!3.1 Weitere Ableitungsregeln

In Kapitel 1.3 haben Sie bereits die Ableitung der Potenzfunktion kennengelernt.

##### Potenzregel

||f(x) =x^n

f'(x) =n \*x^(n -1)\||

---

Diese Ableitungsregel gilt nicht nur für natürliche Exponenten n >=2, sondern auch für beliebige reelle Exponenten.

Ableitungstabelle zur Potenzregel:

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 3

f(x) =x^n: x^3

f\*(x) =n \*x^(n -1): 3 \*x^2

---

n: 2

f(x) =x^n: x^2

f\*(x) =n \*x^(n -1): 2 \*x^1 =2x

---

n: 1

f(x) =x^n: x^1

f\*(x) =n \*x^(n -1): 1 \*x^0 =1

---

n: 0

f(x) =x^n: x^0 =1

f\*(x) =n \*x^(n -1): 0 \*x^(-1) =0

---

n: -1

f(x) =x^n: x^(-1) =1/(x^1)

f\*(x) =n \*x^(n -1): -1 \*x^(-2) =-1/(x^2)

---

n: -2

f(x) =x^n: x^(-2) =1/(x^2)

f\*(x) =n \*x^(n -1): -2 \*x^(-3) =-2/(x^3)

---

+++Beispiel 3.1: |B, C, D|

Ableitung einer Potenzfunktion mit negativem Exponenten

Zeichnen Sie die Hyperbel f mit f(x) =1/x im Intervall [-3; 3] und die Tangenten an den Stellen x =-2 und x =1.

Berechnen Sie die Ableitung der Hyperbel f mithilfe der Potenzregel.

Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Steigung bei x =-2 und x =1 ablesen.

Lösung:

f(x) =1/x =x^(-1)

f'(x) =-1 \*x^(-2) =-1/(x^2)

f'(-2) =-1/4

f'(1) =-1

Die beiden Steigungen in der Grafik sind mit den zugehörigen Differenzialquotienten identisch.

{{Grafik: nicht übertragen}}

j-93

+++Beispiel 3.2: |B, C, D|

Ableitung der Wurzelfunktion (Potenzfunktion mit rationalem Exponenten)

a.)

Zeichnen Sie die Wurzelfunktion mit f(x) ='w(x) im Intervall [0; 6] und die Tangenten an den Stellen x =1 und x =4.

Berechnen Sie die Ableitung der Wurzelfunktion mithilfe der Potenzregel und überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Steigung ablesen.

---

b.)

Ermitteln Sie die Steigung der Wurzelfunktion an der Stelle x =0.

---

Lösung:

a.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

f(x) ='w(x) =x^(1/2)

f'(x) =1/2 \*x^(-1/2) =1/(2 \*'w(x))

f'(1) =1/2

f'(4) =1/4

Die beiden Steigungen in der Grafik sind mit den zugehörigen Differenzialquotienten identisch.

---

b.)

f'(0) =1/(2 \*'w(0)) ist nicht definiert.

Sekantensteigungen für das Intervall [0; 'De x]:

('De y)/('De x) =('w('De x) -'w(0))/('De x -0) =('w('De x))/('De x) =1/('w('De x))

Die Sekantensteigungen streben für 'De x -0 gegen unendlich.

{{Tabelle aufgelöst}}

'De x: 1

1/('w('De x)): 1

---

'De x: 0,1

1/('w('De x)): 3,16

---

'De x: 0,01

1/('w('De x)): 10

---

'De x: 0,001

1/('w('De x)): 31,62

---

'De x: 'De x -> 0

1/('w('De x)): 1/('w('De x)) -> 'ue

---

+++Beispiel 3.3: |B, C|

Zuordnung von Funktionen

Ordnen Sie den Funktionen f\_1(x) =x^(-3), f\_2(x) ='w[3](x) und f\_3(x) =1/('w[3]) die richtige Ableitung g\_1, g\_2 oder g\_3 zu:

g\_1(x) =1/3 \*x^(-2/3)

g\_2(x) =-1/3 \*x^(-4/3)

g\_3(x) =-3 \*x^(-4)

Lösung:

Die Ableitung der Funktion f\_1 lautet: f\_1'(x) =-3 \*x^(-4) (=g\_3(x))

f\_2(x) ='w[3](x) =x^(-1/3)

Die Ableitung der Funktion f\_2 lautet: 1/3 \*x^(-2/3) (=g\_1(x))

f\_3(x) =1/('w[3](x)) =x^(-1/3)

Die Ableitung der Funktion f\_3 lautet: -1/3 \*c^(-4/3) (=g\_2(x))

-----

j-94

### !!3.1.1 Ableitung der Exponentialfunktion

|!|: Die Exponentialfunktion mit der Basis 'e bleibt bei der Differentiation erhalten, d. h. ('e^x)' ='e^x.

Sie ist die einzige Funktion mit der Eigenschaft y' =y.

---

+++Beispiel 3.4: |B|

Ableitung der Exponentialfunktion

Ermitteln Sie zeichnerisch oder mit einem technologischen Hilfsmittel die Tangentensteigung für verschiedene Werte der Exponentialfunktion mit f(x) ='e^x und vergleichen Sie die Tangentensteigung an jeder Stelle mit dem Funktionswert.

Lösung:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

{{Tabelle aufgelöst}}

x: -2

f(x) ='e^x: 0,14

f'(x): 0,14

---

x: -1

f(x) ='e^x: 0,37

f'(x): 0,37

---

x: 0

f(x) ='e^x: 1

f'(x): 1

---

x: 1

f(x) ='e^x: 2,72

f'(x): 2,72

---

x: 2

f(x) ='e^x: 7,39

f'(x): 7,39

---

Aus den Werten der Tabelle darf vermutet werden:

Der Wert der Ableitung an jeder Stelle x ist gleich dem Funktionswert an der gleichen Stelle x.

-----

Für den Differenzenquotienten der Exponentialfunktion f(x) ='e^x erhalten Sie für das Intervall [x; x +'De x]:

('De y)/('De x) =(f(x +'De x) -f(x))/('De x) =('e^(x +'De x) -'e^x)/('De x) =('e^x \*e^('De x) -'e^x)/('De x) ='e^x \*('e^('De x) -1)/('De x)

Für die Ableitung folgt:

f'(x) ='lim['De x -> 0]('e^x) \*'lim['De x -> 0](('e^('De x) -1)/('De x)) ='e^x, da 'lim['De x -> 0](('e^('De x) -1))/('De x)) =1

Diesen Grenzwert ermitteln Sie mithilfe des Taschenrechners (siehe Tabelle in der Randspalte).

{{Tabelle aufgelöst}}

'De x: 1

('e^('De x) -1)/('De x): 1,781

---

'De x: 0,1

('e^('De x) -1)/('De x): 1,0517

---

'De x: 0,01

('e^('De x) -1)/('De x): 1,005

---

'De x: 0,001

('e^('De x) -1)/('De x): 1,0005

---

'De x: 'De x -> 0

('e^('De x) -1)/('De x): ('e^('De x) -1)/('De x) -> 1

---

Satz: Ableitung der Exponentialfunktion

||f(x) ='e^x

f'(x) ='e^x\||

---

Die Exponentialfunktion ex bleibt beim Differenzieren unverändert.

('e^x)' ='e^x

j-95

### !!3.1.2 Ableitung der Logarithmusfunktion

|!|: Da die Ableitung des natürlichen Logarithmus einfacher ist als etwa die Ableitung des dekadischen Logarithmus, ist es sinnvoll, in mathematischen Anwendungen mit dem natürlichen Logarithmus zu rechnen.

+++Beispiel 3.5: |B|

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Ermitteln Sie zeichnerisch oder mit einem technologischen Hilfsmittel die Tangentensteigung für verschiedene Werte der Logarithmusfunktion mit f(x) ='ln(x).

Lösung:

{{Grafik: nicht übertragen}}

{{Tabelle aufgelöst}}

x: 1

f(x) ='ln(x): 0

f'(x): 1

---

x: 2

f(x) ='ln(x): 0,69

f'(x): 1/2

---

x: 4

f(x) ='ln(x): 1,39

f'(x): 1/4

---

Es liegt die Vermutung nahe, dass die Ableitung der Kehrwert des Arguments ist.

-----

##### Satz: Ableitung der Logarithmusfunktion

||f(x) ='ln(x)

f'(x) =1/x\||

---

('ln(x))' =1/x

### !!3.1.3 Ableitung der Winkelfunktionen

+++Beispiel 3.6: |B|

Ableitung der Sinusfunktion

Zeichnen Sie die Sinusfunktion mit f(x) ='sin(x). Ermitteln Sie zeichnerisch oder mit einem technologischen Hilfsmittel die Tangentensteigungen für die Vielfachen von n und tragen Sie diese Tangentensteigungen in ein eigenes Koordinatensystem ein. Welcher Funktionsgraph ergibt sich durch die Tangentensteigungen?

Lösung:

{{Grafik: Sinusfunktion, Kosinusfunktion}}

Es ist der Graph der Kosinusfunktion.

-----

Das grafische Differenzieren hilft bei den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Die rechnerische Herleitung der Ableitungen der Winkelfunktionen erfordert komplizierte Grenzwertüberlegungen, auf die hier verzichtet wird.

---

j-96

-) Der Beweis für die Ableitung der Kosinusfunktion wird mit der Kettenregel erbracht.

-) Der Beweis für die Ableitung der Tangensfunktion wird mit der Quotientenregel erbracht.

Satz: Ableitungen der Winkelfunktionen

||f(x) ='sin(x)

f'(x) ='cos(x)

f(x) ='cos(x)

f'(x) =-'sin(x)

f(x) ='tan(x)

f'(x) =1 +'tan^2(x) =1/('cos^2(x))\||

---

+++Beispiel 3.7: |B|

Ableitungen

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =x^(3/2 -x^(2/3)

f'(x) =3/2 \*'w(x) -2/3 \*x^(-1/3)

---

b.)

f(x) ='w(x^3) +'w[3](x^2)

f'(x) =3/2 \*'w(2) +2/3 \*x^(-1/3)

---

c.)

f(x) =5 \*'e^2 -2 \*'ln(x)

f'(x) =5 \*'e^x -2/x

---

d.)

f(x) =2 \*'sin(x) +3 \*'cos(x) -4 \*'tan(x)

f'(x) =2 \*'cos(x) -3 \*'sin(x) -4/('cos^2(x)

-----

+++Beispiel 3.8: |B|

Höhere Ableitungen der Sinus-Funktion

Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Sinusfunktion.

f(x) ='sin(x)

f'(x) ='cos(x)

f''(x) =-'sin(x)

f'''(x) =-'cos(x)

f[4](x) ='sin(x) =f(x)

-----

Im Folgenden lernen Sie Ableitungsregeln für Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen kennen.

### !!3.1.4 Produktregel

+++Beispiel 3.9: |B|

Ableitung des Produktes zweier Funktionen

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f(x) =(x^2 -1) \*(x^2 +x).

Lösung:

Diese Funktion ist das Produkt der beiden Funktionen u und v mit u(x) =x^2 -1 und v(x) =x^2 +x.

Lösen Sie die Klammern auf, erhalten Sie eine Polynomfunktion, die Sie mit der Summenregel ableiten können:

f(x) =x^4 +x^3 -x^2 -x

f'(x) =4 \*x^3 +3 \*x^2 -2 \*x -1

-----

Das vorige Beispiel kann auch mithilfe der Produktregel gelöst werden.

##### Satz: Produktregel

||f(x) =u(x) \*v(x)

f'(x) =u'(x) \*v(x) +u(x) \*v'(x)\||

---

Produktregel (kurz):

(u \*v)' =u' \*v +u \*v'

j-97

Begründung:

f'(x) ='lim['De x -> 0]((u(x +'De x) \*v(x +'De x) -u(x) \*v(x))/('De x)) ='lim['De x -> 0]((u(x +'De x) \*v(x +'de x) -u(x) \*v(x +'De x) +u(x) \*v(x +'De x) -u(x) \*v(x))/('De x)) ='lim['De x -> 0]((u(x +'De x) -u(x))/('De x) \*v(x +'De x)) +'lim['De x -> 0]((u(x) \*(v(x +'De x) -v(x))/('De x)) =u'(x) \*v(x) +u(x) \*v'(x),

da 'lim['De x -> 0](v(x +'De x) =v(x) wegen der Stetigkeit von v.

Die Faktorregel ist ein Spezialfall der Produktregel mit u =c und damit u' =0.

|!|: Für die beiden Funktionen u und v in den Formeln werden in Formelsammlungen auch die Buchstaben f und g verwendet.

---

+++Beispiel 3.9: |B|

Ableitung des Produktes zweier Funktionen (Fortsetzung)

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f(x) =(x^2 -1) \*(x^2 +x)

Lösung:

u =x^2 -1

u' =2 \*x

v =x^2 +x

v' =2 \*x +1

f'(x) =2 \*x \*(x^2) +(x^2 -1) \*(2 \*x +1) =

{{ZI: u' \*v +u \*v'}}

=2 \*x^3 +2 \*x^2 +2 \*x^3 -2 \*x +x^2 -1 =4 \*x^3 +3 \*x^2 -2 \*x -1

erhalten dieselbe Ableitung wie oben.

-----

+++Beispiel 3.10: |B|

Produktregel

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von:

a.)

f(x) =x^2 \*'e^x

u =x^2

u' =2x

v ='e^x

v' ='e^x

f'(x) =2x \*'e^x +x^2 \*'e^x =x \*'e^x \*(2 +1)

u' \*v +u \*v'

{{Grafik: CAS; Berechnung mit Technologie}}

---

b.)

f(x) =x \*'sin(x) +'cos(x)

f'(x) =1 \*'sin(x) +x \*'cos(x) -'sin(x) =x \*'cos(x)

-----

### !!3.1.5 Quotientenregel

+++Beispiel 3.11: |B|

Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f(x) =(x^2 -1)/x =(x^2 -1) /x.

Lösung:

Diese Funktion ist der Quotient der beiden Funktionen u und v mit u(x) =x^2 -1 und v(x) =x.

Dividieren Sie die rechte Seite, erhalten Sie eine Polynomfunktion, die Sie mit der Summen- und Potenzregel ableiten können:

f(x) =x -1/x =x -x^(-1)

f'(x) =1 +x^(-2) =1 +1/(x^2)

-----

Das vorherige Beispiel kann auch mithilfe der Quotientenregel gelöst werden.

##### Satz: Quotientenregel

||f(x) =(u(x))/(v(x))

f\*(x) =(u'(x) \*v(x) -u(x) \*v'(x))/(v^2(x))

v(x) \=0\||

---

Quotientenregel (kurz):

(u/v)' =(u' \*v -u \*v^2)/(v^2)

Die Begründung verläuft ähnlich derjenigen der Produktregel.

j-98

+++Beispiel 3.12: |B|

Ableitung des Quotienten zweier Funktionen (Fortsetzung zu 3.11)

Berechnen Sie die Ableitung mit der Quotientenregel: f(x) =(x^2 -1)/x

Lösung:

u =x^2 -1

u' =2 \*x

v =x

v' =1

f'(x) =(2 \*x \*x -(x^2 -1) \*1)/(x^2) =(2 \*x^2 -x^2 +1)/(x^2) =(x^2 +1)/(x^2) =1 +1/(x^2)

Sie erhalten dieselbe Ableitung wie oben.

-----

+++Beispiel 3.13: |B|

{{Grafik: CAS; Berechnung mit Technologie}}

Quotientenregel

Berechnen Sie die Ableitung von:

f(x) =(3x -5)/(x^2 +1)

u =3x -5

v =x^2 +1

f'(x) =(3 \*(x^2 +1) -(3x -5) \*2x)/((x^2 +1)^2

f'(x) =(-3x^2 +10x +3)/((x^2 +1)^2)

---

b.)

f(x) ='tan(x) =('sin(x))/('cos(x))

f'(x) =('cos(x) \*'cos(x) -'sin(x) \*(-'sin(x))/('cos^2 x) =1/('cos^2(x), da 'sin^2(x) +'cos^2(x) =1

Aus f'(x) =('cos^2(x) +'sin^2(x))/('cos^2(x)) folgt auch f'(x) =1 +'tan^2(x)

---

c.)

f(x) =(x^2)/('ln(x))

u =x^2

u' =2x

v ='ln(x)

v' =1/x

f\*(x) =(2x \*'ln(x) -x^2 -1/x)// (('ln(x))^2) =(x \*(2 \*'ln(x) -1))/(('ln(x))^2)

-----

|T|: Beachten Sie die besondere Schreibweise:

'sin^2(x) =('sin(x))^2

'cos^2(x) =('cos(x))^2

'tan^2(x) =('tan(x))^2

---

|T|: Neben Verkettung ist auch der Begriff "Hintereinanderausführung" üblich.

Sie sind nun in der Lage, die Potenzregel für negative ganzzahlige Exponenten mit der Quotientenregel zu zeigen.

f(x) =1/(x^n) =x^(-n)

f'(x) =-(n \*x^(n -1))/(x^(2n)) =-n \*x^(-n -1)

### !!3.1.6 Kettenregel

Viele Funktionen sind Verkettungen von elementaren Funktionen. Zum Beispiel kann f(x) ='w(3 \*x +1) als Verkettung f(x) =u(v(x)) mit v(x) =3 \*x +1 und u(x) ='w(x) aufgefasst werden.

Funktionen verketten heißt, in einem Funktionsterm das Argument durch einen anderen Funktionsterm zu ersetzen.

Die Verkettung von Funktionen ist nicht kommutativ, wie das Beispiel zeigt:

u(x) ='w(x)

v(x) =3 \*x +1

u(v(x)) ='w(3 \*x +1)

v(u(x)) =3 \*'w(x) +1

---

Beispiele für Verkettungen:

f(x) =(3x +1)^2

f(x) =(3x +1)^3

f(x) ='w(3x +1)

f(x) ='ln(3x +1)

f(x) ='e^(3x +1)

innere Funktion v(x) =3 \*x +1

{{Grafik: "Verkettung"}}

---

f(x) =(u 'vk v)(x) =u(v(x))

"'vk" steht für "verknüpft"

u äußere Funktion

v innere Funktion

---

##### Satz: Kettenregel

||Seien u: U 'el 'R und v: 'el 'R Funktionen.

Die Funktion v sei an der Stelle x 'el V differenzierbar und die Funktion u sei an der Stelle z =v(x) 'el U differenzierbar.

Dann ist die verkettete Funktion f mit f(x) =u(v(x)) an der Stelle x differenzierbar und es gilt: f'(x) =u'(v(x)) \*v'(x)\||

---

j-99

+++Beispiel 3.14: |B|

Verkettung von Wurzelfunktionen

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

a.)

f(x) =u(v(x)) ='w(3 +x +1)

v(x) =3 \*x +1 innere Funktion

u(v) =v^(1/2) äußere Funktion

v'(x) =3 innere Ableitung

u'(v) =1/2 \*v^(-1/2) äußere Ableitung

Die Kettenregel lässt sich sehr einprägsam visuell darstellen:

f(x) =(3x +1)^(1/2)

f'(x) =1/2 \*(3x +1)^(-1/2) \*3 =3/2 \*1/('w(3x +1))

{{Grafik: CAS; Berechnung mit Technologie}}

---

b.)

f(x) ='w(x^2 +1)

f'(x) =1/2 \*(x^2 +1)^(-1/2) \*2x =(2x)/(2 \*'w(x^2 +1)) =x/('w(x^2 +1))

-----

|V|: Kettenregel: f'(x) =u\*(v(x)) \*v'(x)

|!|: ('w(g(x)))' =(g'(x))/(2 \*'w(g(x)))

Die Ableitung einer Wurzelfunktion ist ein Spezialfall der Kettenregel, der häufig auftritt.

speziell: ('w(x))' =1/(2 \*'w(x))

---

Oft gibt es mehrere Möglichkeiten, die Ableitung einer Funktion zu ermitteln.

+++Beispiel 3.15: |B, D|

Überprüfung der Kettenregel

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f(x) =(3 \*x -1)^3 zuerst mit der Kettenregel:

f(x) =(3 \*x -1)^3

f(x) =3 \*(3 \*x -1)^2 \*3 =9 \*(9 \*x^2 -6 \*x +1)

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Kettenregel durch vorheriges Ausrechnen des Binoms und anschließender Ableitung:

f(x) =(3 \*x -1)^3 =27 \*x^3 -27 \*x^2 +9 \*x -1

f'(x) =81 \*x^2 -54 \*x +9 =9 \*(9 \*x^2 -6 \*x +1)

Sie erhalten dasselbe Ergebnis wie bei Anwendung der Kettenregel.

-----

+++Beispiel 3.16: |B|

Verkettung bei Exponentialfunktionen

a.)

f(x) ='e^(0,1x)

f'(x) = 'e^(0,1x) \*0,1

---

b.)

f(x) ='e^(3x^2 -7)

f'(x) ='e^(3x^2 -7) \*6x

---

c.)

f(x) =12 \*'e^(-(x^2)/2) +5

f'(x) =12 \*e^(-x^2)/2) \*(-x) +0 =-12x \*'e^(-(x^2)/2)

---

d.)

f(x) =3x \*'e^(-(x^2)/2)

f'(x) =3 \*'e^(-(x^2)/2) +3x \*'e^(-(x^2)/2) \*(-x) =3 \*'e^(-(x^2)/2) \*(1 -x^2)

-----

j-100

(ax)' =ax \*'ln(a)

('log\_a(x))' =1/(x \*'ln(a))

Die Ableitung der Exponentialfunktion zu einer beliebigen positiven Basis a ergibt sich mithilfe der Kettenregel:

f(x) =a^x ='e^('ln(a) \*x), da a ='e^('ln(a))

f\*(x) ='e^('ln(a) \*x) \*'ln(a) \*'ln(a)

Auch die Ableitung der Logarithmusfunktion zu einer beliebigen Basis folgt mithilfe der Kettenregel:

('log\_a(x))' =1/(x \*'ln(a))

für a 'el 'R^+ \{0}, da 'log\_a(x) =('ln(x))/('ln(a))

Ableitung der Kosinusfunktion mithilfe der Kettenregel:

Zur Ableitung von f(x) ='cos(x) verwendet man die Komplementärbeziehung

'cos(x) ='sin(('pi)/2 -x) und 'cos(('pi)/2 -x) ='sin(x)

f(x) ='cos(x) ='sin(('pi)/2 -x)

f\*(x) ='cos(('pi)/2 -x) \*(-1) =-'cos(('pi)/2 -x) =-'sin(x)

Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion:

Bisher war die Ableitungsregel für die Potenzfunktion f mit f(x) =x^n (x >0) nur für n 'el 'Z \{0} bewiesen.

Mit der Kettenregel lässt sich diese Regel auf r 'el 'R erweitern:

f(x) =x^r =('e^('ln(x)))^r =e^(r \*'ln(x))

f'(x) =e^(r \*'ln(x)) \*r \*1/x =x^r \*r \*1/x =r \*x^(r -1)

(x^r)' =r \*x^(r -1) (r 'el 'R\{0})

Für zahlreiche Aufgaben ins ferner folgende Regel zweckmäßig: ['ln(g(x))]' =(g'(x))/(g(x))

+++Beispiel 3.17: |B|

Verkettung mit natürlicher Logarithmusfunktion

['ln(g(x))]' =(g'(x))/(g(x))

f(x) ='ln(2 \*x^3 +7)

f'(x) =1/(2 \*x^3 +7) \*6 \*x^2 =(6 \*x^2)/(2 \*x^3 +7)

-----

+++Beispiel 3.18: |B|

Verkettung mit Logarithmusfunktionen

('log\_a(x))' =1/(x \*'ln(a))

f(x) ='lg(2x^2 +5)

f'(x) =1/((2x^2 +5) \*'ln(10)) \*4x =4/('ln(10)) \*x/(2x^2 +5)

---

f(x) ='log\_5(3x^2)

f'(x) =(6x)/(3x^2 \*'ln(5)) =2/(x \*'ln(5))

---

f(x) =x \*'ln(x)

f'(x) =1 \*'ln(x) +x \*1/x ='ln(x) +1

-----

+++Beispiel 3.19: |B|

Verkettung mit Winkelfunktionen

f(x) =2 \*'sin(3 \*x)

f'(x) =2 \*'cos(3 \*x) \*3 =6 \*'cos(3 \*x)

---

f(x) =0,5 \*'cos(2 \*x)

f'(x) =-0,5 \*'sin(2 \*x) \*2 =-'sin(2 \*x)

---

f(x) ='tan(4 \*x)

f'(x) =4/('cos^2(4 \*x))

-----

##### Zusammenfassung der Ableitungsregeln in Kurzform

||Faktorregel: (c \*f)' =c \*f'

Summenregel: (f +-g)' =f' +-g'

Produktregel: (f \*g)' =f' \*g +f \*g'

Quotientenregel: (f/g)' =(f' \*g -f \*g')/(g^2)

Kettenregel: f(g(x))' =f'(g(x)) \*g'(x) \||

---

j-101

##### Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

||Funktion: 1/x

Ableitung: -1/(x^2)

Funktion: 'w(x)

Ableitung: 1/(2 \*'w(x))

Funktion: 'w(f(x))

Ableitung: (f'(x))/(2 \*'w(f(x)))

Funktion: 'ln(f(x))

Ableitung: (f'(x))/(f(x))\||

---

##### Übungsaufgaben

(c \*u)' =c \*u' (c 'el 'R)

Funktion: 'e^x; Ableitung: 'e^x

Funktion: a^x; Ableitung: a^x \*'ln(a)

Funktion: 'ln(x); Ableitung: 1/x

Funktion: 'sin(x); Ableitung: 'cos(x)

Funktion: 'cos(x); Ableitung: -'sin(x)

Funktion: 'tan(x); Ableitung: 1/('cos^2(x))

---

+++3.001 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung mithilfe der Potenz- und Faktorregel:

a.)

f(x) =1/(x^2)

**[]**

---

b.)

f(x) =4 \*'w(x)

**[]**

---

c.)

f(x) =x/(2 \*'w(x))

**[]**

---

d.)

f(x) ='w^[3](x)

**[]**

---

e.)

f(x) =(12)/(x^2)

**[]**

---

f.)

f(x) =x^(-3)

**[]**

---

g.)

f(x) =4 \*x^(-2)

**[]**

-----

+++3.002 |B|

Ermitteln Sie mithilfe der Potenz- und Faktorregel die erste Ableitung sowie die Tangentensteigung jeweils an der Stelle x\_0 =2 und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem technologischen Hilfsmittel.

a.)

f(x) ='w(2x)

**[]**

---

b.)

f(x) ='w((3x)/(2)

**[]**

---

c.)

f(x) ='w(2/x)

**[]**

---

d.)

f(x) =('w(2))/x

**[]**

---

e.)

f(x) =3/('w(x))

**[]**

---

f.)

f(x) ='(5x^3)

**[]**

---

g.)

f(x) ='w^[3](x^2)

**[]**

---

h.)

f(x) =5/('w^[3](x^2))

**[]**

-----

+++3.003 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung mithilfe der Faktorregel.

a.)

f(x) =2 \*'e^x

**[]**

---

b.)

f(x) =('e^x)/('w(2'pi))

**[]**

---

c.)

f(x) =('ln(x))/('ln(2))

**[]**

---

d.)

f(x) =('w(2))/(x

**[]**

---

e.)

f(x) ='w(2) \*'sin(x)

**[]**

---

f.)

f(x) =('cos(x))/4

**[]**

---

g.)

f(x) =3/4 \*'cos(x)

**[]**

---

h.)

f(x) =2 \*'tan(x)

**[]**

-----

+++3.004 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) =(x^2 -1) \*(x^2 +1)

**[]**

---

b.)

f(x) =(x -1) \*(x^4 +x^3 +x^2 +x +1)

**[]**

-----

+++3.005 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung nach der unabhängigen Variable.

a.)

g(y) =y -'w(y) +2

**[]**

---

b.)

C(a) =5a^(0,8) +0,2

**[]**

---

c.)

k(x) =0,1x +5 +(50)/x

**[]**

---

d.)

p(z) =1 -3/(z^2)

**[]**

-----

+++3.006 |B, C|

Ermitteln Sie die erste Ableitung und die Tangentensteigung in x\_0.

Interpretieren Sie jeweils die Tangentensteigung.

a.)

f(x) =1/x +1/(x^2)

x\_0 =2

**[]**

---

b.)

f(x) =2 -2 \*'w(x)

x\_0 =4

**[]**

---

c.)

f(x) =x/2 -4/x -1/5

x\_0 =-2

**[]**

---

d.)

f(x) =x/(4 \*'w(x)) -2/('w(2))

x\_0 =1

**[]**

-----

+++3.007 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung mithilfe der Summen- und Faktorregel.

a.)

f(x) =3 \*'e^x -1

**[]**

**---**

b.)

f(x) =('ln(x)/2 -'ln(2)

**[]**

---

c.)

f(x) =1/4 \*'e^x -1

**[]**

---

d.)

f(x) =2 \*'ln(x) -'w(2)

**[]**

---

e.)

f(x) =2 \*'sin(x) +2 \*'cos(x)

**[]**

---

f.)

f(x) ='sin(x) +'pi

**[]**

---

g.)

f(x) =('sin(x)/4) +x/4

**[]**

---

h.)

f(x) =3 \*'tan(x)

**[]**

-----

+++3.008 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung mithilfe der Produktregel.

Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie den Funktionsterm ausmultiplizieren und nach der Summenregel ableiten.

a.)

f(x) =(2 \*x -3) \*(3 \*x +2)

**[]**

---

b.)

f(x) =(2 \*x^2 -1) \*(3 \*x -2)

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 -2 \*x) \*(x^2 +3)

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^2 -2) \*(x^2 +2)

**[]**

-----

j-102

+++3.009 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) =3 \*x \*'e^x

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2 \*'e^x

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 -4) \*'e^x

**[]**

---

d.)

f(x) =2 \*x^2 \*'ln(x)

**[]**

---

e.)

f(x) =x \*'sin(x)

---

f.)

f(x) =x^2 \*'cos(x)

**[]**

---

g.)

f(x) =2 \*x \*'tan(x)

**[]**

---

h.)

f(x) ='e^x \*'sin(x)

-----

|T|: Quotientenregel (kurz):

(f/g)' =(f' g -f \*g')/(g^2)

+++3.010 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) =(x +5)/x

**[]**

---

b.)

f(x) (x +5)/(x +2)

**[]**

---

c.)

f(x) =(2x -1)/(3x -2)

**[]**

---

d.)

f(x) =(-2x +7)/(3x)

**[]**

---

e.)

f(x) =(x +2)/(x +3)

**[]**

---

f.)

f(x) =(-2x +3)/(-5x +1)

**[]**

---

g.)

f(x) =(4x)/(x^2 +5x +6)

**[]**

---

h.)

f(x) =(5x)/((2x -1) \*(x +2))

**[]**

-----

+++3.011 |B, C|

Berechnen und interpretieren Sie die erste Ableitung an der Stelle x\_0.

Kontrollieren Sie das Ergebnis mit einem technologischen Hilfsmittel.

a.)

f(x) =(x^2)/(x +5)

x\_0 =-1

**[]**

---

b.)

f(x) =(2x +1)/(x +2)

x\_0 =2

**[]**

---

c.)

f(x) =(2x)/(x -4)

x\_0 =1

**[]**

---

d.)

f(x) =(-2x +5)/(3x)

x\_0 =3

**[]**

-----

+++3.012 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) =1/(x^2 -1)

**[]**

---

b.)

f(x) =x/(x^2 -1)

**[]**

---

c.)

f(x) =(2x^2)/(x -1)

**[]**

---

d.)

f(x) =(3x^2)/(x^2 -1)

**[]**

---

e.)

f(x) =(1 -x)/(1 +x)

**[]**

---

f.)

f(x) =(1 -x^2)/(1 +x^2)

**[]**

---

g.)

f(x) =(1 -x^3)/(1 +x^3)

**[]**

---

h.)

f(x) =(1 -x^4)/(1 +x^2)

**[]**

-----

+++3.013 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) =(4 \*x -1)^2

**[]**

---

b.)

f(x) =(4 -3 \*x)^2

**[]**

---

c.)

f(x) =5 \*(4 \*x +2)^2

**[]**

---

d.)

f(x) =5 \*(3 \*x^2 -4 \*x +6)^3

**[]**

---

e.)

f(x) =(5 \*x)^3

**[]**

---

f.)

f(x) =7 \*(-5 \*x +2)^4

**[]**

---

g.)

f(x) =(x -3)^5

**[]**

---

h.)

f(x) =-2 \*(-x^2 +1)^2

**[]**

-----

Kettenregel: f'(x) =u'(v(x)) \*v'(x)

+++3.014 |B|

Ermittelns Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) ='w(4x -1)

**[]**

---

b.)

f(x) ='w(1 -x^2)

**[]**

---

c.)

f(x) ='w[3](4x -1)

**[]**

---

d.)

f(x) ='w[3]((4x -1)^2)

**[]**

---

e.)

f(x) ='w(x^2 -4)

**[]**

---

f.)

f(x) ='w((x^2 -4)^3)

**[]**

---

g.)

f(x) ='w[3]((x^2 -4)^2)

**[]**

---

h.)

f(x) ='w[3]((x^2 -4)^4)

**[]**

-----

+++3.015 |B, D|

Ermitteln Sie die erste Ableitung mit verschiedenen Ableitungsregeln.

Mit welcher Regel lässt sich die Ableitung am elegantesten berechnen? Argumentieren und begründen Sie.

a.)

f(x) ='w(3x)

**[]**

---

b.)

f(x) =(x -2/x)^2

**[]**

---

c.)

f(x) =x \*'w(x)

**[]**

---

d.)

f(x) =('w(x) -3)^2

**[]**

---

e.)

f(x) =(x +5)/x

**[]**

---

f.)

f(x) =x/(2 \*'w(x))

**[]**

---

g.)

f(x) ='w(x) \*x^2

**[]**

---

h.)

f(x) =1/(x^2 -4)

**[]**

-----

+++3.016 |B, C|

Berechnen und interpretieren Sie die erste Ableitung an der Stelle x\_0.

Kontrollieren Sie das Ergebnis mit einem technologischen Hilfsmittel.

a.)

f(x) =(2/x -x/2)^2

x\_0 =3

**[]**

---

b.)

f(x) =(2 -'w(x))^2

x\_0 =2

**[]**

---

c.)

f(x) =(2x -3)/(5x)

x\_0 =2

**[]**

---

d.)

f(x) =3/(x^2 -4)

x\_0 =-1

**[]**

-----

+++3.017 |B|

Ermitteln Sie die erste Ableitung und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a.)

f(x) =((1 -x)/(1 +x))^2

**[]**

---

b.)

f(x) =x \*'w(1 +x^2)

**[]**

---

c.)

f(x) =('w(x^2 +3))/(2x +1)

**[]**

---

d.)

f(x) ='((2x +3)/(2x -3))

**[]**

---

e.)

f(x) =(x -2) \*'w(2x +3)

**[]**

---

f.)

f(x) =((x^2 -1)/(2x +1))^2

**[]**

---

g.)

f(x) =(x/(x +3))^3

**[]**

-----

j-103

+++3.018 |B, C|

Berechnen und interpretieren Sie die erste Ableitung an der Stelle x\_0 und kontrollieren Sie das Ergebnis mit einem technologischen Hilfsmittel.

a.)

f(x) =((x^2)/(x +4))^2

x\_0 =2

**[]**

---

b.)

f(x) =x/4 \*'(x^2 +1)

x\_0 =1

**[]**

---

c.)

f(x) =(2 -2x^2)/(1 +x^2)

x\_0 =2

**[]**

-----

+++3.019 |B|

Er mitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) ='e^(2x)

**[]**

---

b.)

f(x) =2 \*'e^(-x)

**[]**

---

c.)

f(x) ='e^(x/4)

**[]**

---

d.)

f(x) ='e^(-(x^2)/2)

**[]**

---

e.)

f(x) =x \*'e^(-x)

**[]**

---

f.)

f(x) =2x \*'e^(-x/2)

**[]**

---

g.)

f(x) =x^2 \*'e^(-x/2)

**[]**

---

h.)

f(x) =4x \*'e^(-(x^2)/2)

**[]**

-----

+++3.020 |B|

Er mitteln Sie die erste und zweite Ableitung.

a.)

f(x) =3 \*'e^x

**[]**

---

b.)

f(x) =3 +'e^x

**[]**

---

c.)

f(x) ='e^(3x)

**[]**

---

d.)

f(x) =3x +'e^(3x)

**[]**

---

e.)

f(x) ='e^(3 +x)

**[]**

---

f.)

f(x) =3x^2 +'e^(3x^2)

**[]**

---

g.)

f(x) =3 \*'e^(2x)

**[]**

---

h.)

f(x) =5 \*'e^(x +2)

**[]**

-----

+++3.021 |B|

Er mitteln Sie die erste Ableitung.

a.)

f(x) ='ln(2x -1)

**[]**

---

b.)

f(x) ='ln(x^2)

**[]**

---

c.)

f(x) ='ln(2x -1)^2

**[]**

---

d.)

f(x) ='ln(1/x)

**[]**

---

e.)

f(x) =('ln(x))^2

**[]**

---

f.)

f(x) =1/('ln(x))

**[]**

---

g.)

f(x) =x^2 \*'ln(x)

**[]**

---

h.)

f(x) =('ln(x))/x

**[]**

-----

+++3.022 |B|

Er mitteln Sie jeweils die erste und zweite Ableitung.

a.)

f(x) ='sin(2 \*x)

**[]**

---

b.)

f(x) ='cos(2 \*x -1)

**[]**

---

c.)

f(x) =x \*'sin(x)

**[]**

---

d.)

f(x) =x^2 \*'cos(x)

**[]**

---

e.)

f(x) =2 \*'sin(x) \*'cos(x)

**[]**

---

f.)

f(x) =2 \*'cos(x) +'cos^2(x)

**[]**

---

g.)

f(x) ='tan(2 \*x)

**[]**

---

h.)

f(x) =('tan(x))/2

**[]**

-----

+++3.023 |A, B, C|

Die Grafik zeigt den Graphen der Funktion f mit f(x) ='e^(-(x^2)/2) im Intervall [-3; 3].

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Skizzieren Sie im zweiten Koordinatensystem aus den Angaben der Grafik den Graphen der ersten Ableitung der Funktion.

**[]**

---

b.)

Erläutern Sie anhand der Graphen, wie mithilfe der Ableitung die Extrem- und Wendestellen ermittelt werden können.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

**[]**

-----

j-104

## !!3.2 Anwendungen

+++Beispiel 3.20: |A, B, C, D|

Exponentielles Bakterienwachstum

Eine Bakterienkultur wächst stündlich um 50 %.

Sie bedeckt anfangs eine Nährlösung mit 10 cm^2.

a.)

Erstellen Sie eine Wachstumsfunktion der Form N(t) =N\_0 \*a^t bzw. N(t) =N\_0 \*'e^(k \*t) und stellen Sie diese Funktion grafisch dar.

---

b.)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Wachstumsfunktion.

---

c.)

Berechnen Sie, wie groß die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t =0 ist.

---

d.)

Ermitteln Sie, wie viel Prozent des Anfangswerts die momentane Änderungsrate beträgt.

---

e.)

Überprüfen Sie, ob sich die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t =2 gegenüber dem Zeitpunkt t =0 ändert.

---

f.)

Interpretieren Sie den Wert k der exponentiellen Wachstumsfunktionen.

---

|V|: Grundwert G =22,5

Prozentsatz i =p % =0,4055

Prozentwert P =G \*i =9,12

---

Lösung:

a.)

N\_0 =10

i =0,5

a =1 +i =1,5

N(t) =10 \*1,5^t

k ='ln(1,5) ~~0,4055

N(t) =10 \*'e^(0,4055 \*t)

---

b.)

('dN)/('dt)(t) =10 \*1,5^t \*'ln(1,5) ~~4,055 \*1,5^t bzw.

('dN)/('dt)(t) =10 \*'e^(0,4055 \*t) \*0,4055 ~~4,055 \*'e^(0,4055 \*t)

---

c.)

N'(0) =10 \*1,5^0 \*'ln(1,5) ~~10 \*0,4055 =4,055 bzw.

N'(0) =10 \*'e^0 \*0,4055 =4,055

Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t =0 beträgt 4,055 cm^2 pro Stunde.

---

d.)

Die momentane Änderungsrate beträgt 40,55 % des Anfangswerts.

---

e.)

N(2) =22,5

N'(2) =10 \*1,5^2 \*'ln(1,5) =22,5 \*0,4055 ~~9,12

Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t =2 beträgt 9,12.

Das sind 40,55 % des Funktionswertes zum Zeitpunkt t =2.

Der Absolutwert der momentanen Änderungsrate (Prozentwert) ändert sich. Der Prozentsatz 40,55 % der momentanen Änderungsrate ändert sich gegenüber jenem des Anfangswerts nicht.

---

f.)

N(t) =N\_0 \*'e^(k \*t)

N'(t) =N\_0 \*'e^(k \*t) \*k =k \*N(t)

Der Faktor k ist der Prozentsatz der momentanen Änderungsrate.

-----

{{Grafik: Thomas R. Malthus, britischer Ökonom, 1766 bis 1834}}

Eine einfache mathematische Möglichkeit, die zukünftige Entwicklung der Bevölkerung eines Landes zu prognostizieren, geht auf Thomas Robert Malthus (1766 bis 1834) zurück. Dabei spielt die Exponentialfunktion zur Basis e eine wesentliche Rolle. Unbeschränktes Wachstum von Populationen gibt es auf lange Sicht in der Realität nicht. Ressourceneinschränkungen (mangelnder Lebensraum, ungenügendes Nahrungsangebot usw.) verhindern ein unbeschränktes Wachstum. Es existiert in der Regel ein Sättigungswert S, der die Größe der Population beschränkt.

j-105

+++Beispiel 3.21: |B|

Bevölkerungsentwicklung in den Vereinigen Staaten

Für die Entwicklung der Bevölkerungszahl der Vereinigten Staaten von Amerika in Millionen kann ein logistisches Wachstum f mit f(t) =(265)/(11 +96 \*'e^(-0,003 \*1) angenommen werden.

Hierbei entspricht t =0 dem Jahr 1790. Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion f von 1790 bis 2090 (also für t =0 bis t =300) dargestellt:

{{Grafik: nicht übertragen}}

{{Grafik: Grafiken mit GTR}}

a.) Berechnen Sie, in welchem Jahr das Wachstum der Bevölkerung am größten ist.

---

b.)

Zeichnen Sie den zugehörigen Punkt im Graphen von f' ein.

---

c.)

Erklären Sie, warum es sich bei diesem Punkt um den Wendepunkt von f handelt.

---

d.)

Erklären Sie die Bedeutung der Koordinaten im Sachzusammenhang.

---

Lösung:

a.)

Um das größte Wachstum der Bevölkerung, d. h., die größte Steigung zu berechnen, ermitteln Sie mit Technologie das Maximum der ersten Ableitung. Die Grafik in der Randspalte zeigt den Graphen der ersten Ableitung, der kaum sichtbar knapp oberhalb der x-Achse liegt.

---

b.)

Das größte Wachstum gibt es im 142. Jahr mit ca. 2 Millionen Menschen.

---

c.)

Hat die Ableitungsfunktion f' an der Stelle x\_0 einen Extremwert, dann ist an dieser Stelle f''(x\_0) =0 und die Funktion f hat an dieser Stelle x\_0 einen Wendepunkt.

Der Wendepunkt ist (141,14|132,5). Im 142. Jahr nach 1790, das heißt, im Jahr 1932 ist der Bevölkerungszuwachs maximal. Im Jahr 1932 lebten nach diesem Modell 132,5 Millionen Menschen in den USA.

-----

j-106

##### Die Bateman-Funktion

{{Grafik: Harry Bateman, britischer Mathematiker, 1882 bis 1946}}

Viele Medikamente werden in Form von Tabletten, Kapseln, Pillen, als Tropfen oder als Saft geschluckt. Die wirksamen Substanzen werden nach der Einnahme über Magen- und Darmwand vom Körper aufgenommen. Dort werden sie umgewandelt, wieder abgebaut und ausgeschieden. Dieser Vorgang wird Elimination genannt. Der Anteil der Wirkstoffe, der je Zeiteinheit absorbiert wird, wird Absorptionskonstante genannt.

Die Eliminationskonstante gibt an, welcher Anteil der im Körper vorhandenen Arzneiwirkstoffe je Zeiteinheit eliminiert wird. Um zu berechnen, wie viel Wirkstoff t Zeiteinheiten nach der Einnahme noch im Körper ist, kann man die Funktion f verwenden:

f(t) =D \*a/(a -b) \*('e^(-b \*t) -'e^(-a \*t)

D eingenommene Menge des Wirkstoffs (Dosis) in ME

a Absorptionskonstante

b Eliminationskonstante

t Zeit in ZE

f(t) Menge des Wirkstoffs in ME zum Zeitpunkt t

f ist eine vereinfachte Variante der nach Harry Bateman (1882 bis 1946) benannten Bateman-Funktion, die in der Medizin angewendet wird.

+++Beispiel 3.22: |A, B|

Medikamentenabbau

Metformin ist ein Medikament, das in Tablettenform zur Behandlung von Diabetes verwendet wird.

Untersuchen Sie, wie sich die Metforminmenge im Körper eines Patienten in den Stunden nach der Einnahme von 500 mg Wirkstoff entwickelt.

Die Entwicklung kann mithilfe der Bateman-Funktion berechnet werden, wobei die Absorptionskonstante a =0,65 und die Eliminationskonstante b =0,2 (jeweils pro Stunde) beträgt.

a.)

Erstellen Sie die Bateman-Funktion und stellen Sie diese grafisch dar.

---

b.) Ermitteln Sie, wie hoch die Metforminmenge nach 1 Stunde, nach 2 Stunden, nach 12 Stunden und nach 24 Stunden ist (gerundet auf mg).

---

c.)

Berechnen Sie die größte Metforminmenge im Körper und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt.

---

Lösung:

a.)

Die Bateman-Funktion lautet

f(t) =500 \*(0,65)/(0,65 -0,2) \*('e^(-0,2 \*t) -'e^(-0,65 \*t)) =722,22 \*('e^(-0,2 \*t) -'e^(-0,65 \*t))

t Zeit in Stunden

f(t) Menge Metformin in mg zum Zeitpunkt t

Der Graph ist in der Randspalte gezeichnet.

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

Aus den Tabellen in der Randspalte ist zu entnehmen, dass die Metforminmenge eine Stunde nach der Einnahme 214 mg beträgt, nach zwei Stunden 287 mg, nach 12 Stunden 65 mg und nach 24 Stunden nur mehr 6 mg.

---

c.)

f'(t) =0

722,22 \*(-0,2 \*'e^(-0,02 \*t) +'e^(-0,65 \*t) =0 | /722,22

-0,2 \*'e^(-0,2 \*t) +0,65 \*'e^(-0,65 \*t) =0 | -'e^(0,65 \*t)

-0,2 \*'e^(0,45t) +0,65 =0 |-0,65 | \*(-5)

'e^(0,45 \*t) =3,25 | 'ln(...)

0,45 \*5 =1,178655 | /0,45

t ~~2,62

f(2,62) ~~296

f''(2,62) <0, daher liegt bei t =2,62 ein Maximum vor.

Die höchste Metforminmenge wird nach ca. 2,6 Stunden erreicht und beträgt rund 296 mg.

-----

j-107

Die Wirksamkeit eines Medikaments ist nicht nur von der verabreichten Menge abhängig, sondern von der Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

Die Konzentration ist die Menge des Wirkstoffs (Dosis) pro Liter Blut.

Mit minimaler therapeutischer Konzentration bezeichnet man die Arzneimenge, die im Körper sein muss, damit das Medikament wirkt.

---

Alle Dinge sind Gift, und nichts ist ohne Gift.

Allein die Dosis macht, dass ein Ding kein Gift ist.

Theophrastus Bombastus von Hohenheim, genannt Paracelsus, deutscher Arzt, 1493 bis 1541

---

+++Beispiel 3.23: |B, C|

Medikamentenabbau 2

Einer Patientin werden 5000 mg eines Wirkstoffs oral verabreicht. Ihr Blutvolumen beträgt 5 Liter. Die Absorptionskonstante ist a =0,6 und die Eliminationskonstante ist b =0,15.

Die Konzentration des Wirkstoffs darf 50 mg/Liter nicht unterschreiten.

a.)

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Bateman-Funktion.

---

b.)

Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeitspanne nach der Einnahme das Medikament wirkt.

---

c.)

Im Diagramm sind der Graph der Funktion K mit dem Wendepunkt W und die Wendetangente t mit Steigung k gegeben.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im Sachzusammenhang.

---

Konzentration =(Dosis)/(Volumen Blut)

K =D/V

{{Grafik: nicht übertragen}}

Lösung:

a.)

K =D/V =(5000 mg)/(5 Liter) =1000 mg/Liter

D \*a/(a -b) =1000 \*(0,6)/(0,6 -0,15) =1333,33

K(t) =1333,33 \*('e^(-0,15 \*t) -'e^(-0,6 \*t))

---

b.)

K(t) =50:

1333,33 \*('e^(-0,15 \*t) -'e^(-0,6 \*t)) =50

Die Gleichung wird mit Technologie gelöst.

Die Funktion nimmt den Wert 50 zweimal an.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Therapeutische Konzentration liegt ab 0,09 Stunden (rund 5 Minuten) nach der Einnahme vor und hält bis ca. 22 Stunden nach der Einnahme an.

---

c.)

K''(t) =0

Mit Technologie erhalten Sie (siehe Randspalte):

{{Grafik: nicht übertragen}}

K(6,16) =496

W(6,16|496)

Steigung k =-59,5

Nach ca. 6,2 Stunden nimmt die Konzentration des Wirkstoffs am stärksten ab. Diese maximale Abnahme beträgt ca. 59,5 mg pro Stunde.

-----

j-108

##### Übungsaufgaben

+++3.024 |B|

Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten lässt sich durch die Funktion K mit K(t) =30 \*t \*'e^(-1,5 \*t) beschreiben.

t >=0 Zeit in Stunden nach der Einnahme des Medikaments

K(t) Konzentration in ('mu g)/Liter zum Zeitpunkt t

a.)

Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die Graphen der Funktion K und der ersten Ableitung K'.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten ab der Einnahme des Medikaments die Konzentration ihren höchsten Wert erreicht.

Ermitteln Sie diese höchste Konzentration.

**[]**

c.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten sich die Konzentration des Medikaments am stärksten ändert.

Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

-----

+++3.025 |B, C|

Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten lässt sich durch die Funktion K mit K(t) =a \*t \*'e^(k \*t) beschreiben:

t Zeit in Stunden nach der Einnahme des Medikaments

K(t) Konzentration im Blut in mg/Liter zum Zeitpunkt t

Die momentane Änderungsrate bei Einnahme des Medikaments beträgt 40 mg/L pro h. Nach einer Stunde ist die maximale Konzentration erreicht.

a.)

Ermitteln Sie die Parameter a und k.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Stunden sich die Konzentration des Medikaments am stärksten ändert.

Ermitteln Sie momentane Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

---

c.)

Interpretieren Sie aus Sicht der Differenzialrechnung jenen Zeitpunkt, an dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.

**[]**

-----

Formel für das logistische Wachstum:

B(t) =S/(1 +b \*'e^(-k \*t))

mit b =S/(B(0) -1

---

+++3.026 |B, D|

Das Höhenwachstum einer Sonnenblume lässt sich gut durch eine logistische Funktion h modellieren:

h(t) =(2,6)/(1 +19 \*'e^(-0,59 \*t)

t >=0 Zeit in Wochen ab Beobachtungsbeginn

h(t) Höhe der Sonnenblume in Metern (m) zum Zeitpunkt t

a.)

Stellen Sie das Höhenwachstum der Sonnenblumen sowie deren Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate des Höhenwachstums) grafisch dar.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Höhe der Sonnenblume zu Versuchsbeginn.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, warum bei diesem Modell die Höhe der Sonnenblumen sich dem Wert 2,6 Meter annähern.

**[]**

d.)

Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblume das größte Wachstum hat.

Berechnen Sie die Höhe und die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Sonnenblume zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Sonnenblume 90 % ihrer maximalen Höhe erreicht hat.

Berechnen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

**[]**

-----

j-109

+++3.027 |B, D|

Oral aufgenommene, wasserlösliche Medikamente werden nach der Einnahme vom Darm ins Blut aufgenommen und anschließend über den Blutkreislauf im ganzen Körper verteilt. Gleichzeitig werden die Wirkstoffe aus dem Blut über die Nieren wieder ausgeschieden.

Die Konzentration K eines bestimmten oral verabreichten Wirkstoffes im Blut lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t nach der Einnahme angenähert durch die Bateman-Funktion mit K(t) =A \*('e^(-'al \*t) -'e^(-'be \*t)) beschreiben.

Die Konzentration K ist in mg pro Liter und die Zeit t ist in Stunden angegeben. Es soll die momentane Änderungsrate berechnet werden.

a.)

Kreuzen Sie die richtige(n) Lösung(en) an.

**[]** K'(t) ='e^(-'al \*t) -'e(-'be \*t))

**[]** K'(t) =A \*'e^(-'al \*t) -'e(-'be \*t))

**[]** K'(t) =A \*('be \*e^(-'be \*t) -'e('al \*'e^('al \*t))

**[]** K'(t) =A \*('e^(-'al \*t) \*(-'al) -'e(-'be \*t) \*(-'be))

---

b.)

Begründen Sie Ihre Entscheidung für die falschen Lösungen.

**[]**

-----

+++3.028 |B, D|

Eine Bateman-Funktion K lässt sich mit K(t) =3 \*('e^(-0,2 \*t -'e^(-0,4 \*t)) beschreiben.

t Zeit in Stunden

K(t) Konzentration in mg pro Liter zum Zeitpunkt t

a.)

Begründen Sie, warum sich die Bateman-Funktion zusammengefasst nicht einfacher mit K(t) =3 \*'e^(-0,6 \*t) beschreiben lässt.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion.

**[]**

-----

+++3.029 |A, B, C|

Ein Patient nimmt nach einer Zahnextraktion eine Tablette mit der Dosis =10 mg eines Schmerzmittels ein. Die Wirkstoffmenge im Körper soll mithilfe einer Bateman-Funktion modelliert werden:

f(t) =D \*a/(a -b) \*('e^(-b \*t) -'e^(-a \*t))

Es kann eine Absorptionsrate a von 0,6 und eine Eliminationsrate b von 0,2 je Stunde angenommen werden.

a.)

Erstellen Sie die Bateman-Funktion für dieses Schmerzmittel.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Wirkstoffmenge im Körper jeweils nach 1 Stunde, 10 Stunden, 24 Stunden und 36 Stunden.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wirkstoffmenge am größten ist. Berechnen Sie diese Wirkstoffmenge.

**[]**

---

d.)

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wirkstoffmenge am stärksten abnimmt.

Berechnen Sie die maximale Abbaurate. (Geben Sie die Einheit an.)

**[]**

---

e.)

Die Wirkstoffmenge darf den Wert 1,5 mg nicht unterschreiten. Bestimmen Sie das Zeitintervall, für das das Schmerzmittel wirksam ist.

**[]**

---

f.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

**[]**

-----

+++3.030 |B, C|

Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten wird durch die Bateman-Funktion K beschrieben.

K(t) =120 \*('e^(-0,15 \*t) -'e^(-0,9 \*t))

t Zeit in Stunden

K(t) Konzentration in mg pro Liter zum Zeitpunkt t

a.)

Berechnen Sie, nach wie vielen Stunden die größte Konzentration im Blut ist und wie groß diese ist.

**[]**

---

b.)

Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt sich die Konzentration am stärksten ändert.

Berechnen Sie, um wie viel Milligramm/Liter pro Stunde die Konzentration maximal sinkt.

**[]**

---

c.)

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration im Blut unter 10 mg/Liter gesunken ist.

**[]**

---

d.)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

**[]**

-----

j-110

+++3.031 |C|

Die Grafik zeigt die Konzentration K eines Medikaments im Blut eines Patienten in (pg)/Liter in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden (h) nach der Einnahme des Medikaments sowie die erste Ableitung K'.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lesen Sie ab und markieren Sie die entsprechenden Werte in der Grafik:

a.)

das Zeitintervall, in dem die Konzentration mindestens 2 pg/Liter beträgt.

**[]**

---

b.)

den Zeitpunkt, an dem die Konzentration am höchsten ist, sowie den Wert der höchsten Konzentration.

**[]**

---

c.)

den Zeitpunkt, an dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird. Lesen Sie diese Abbaurate ab.

**[]**

---

d.)

Beschreiben Sie, wie Sie den Zeitpunkt berechnen können, an dem die größte Menge an Wirkstoff aus dem Körper ausgeschieden wird.

**[]**

-----

+++3.032 |C, D|

Die Grafik zeigt das Längenwachstum einer Zuckerrübe in Zentimeter (cm) C D in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen einschließlich Wendepunkt W.

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus der Grafik die Länge der Zuckerrübe zu Beginn der Untersuchung und die Sättigungsmenge ab.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie die beiden Koordinaten des Wendepunktes.

**[]**

---

c.)

Argumentieren Sie, warum bei logistischem Wachstum ein Wendepunkt sein muss.

**[]**

---

d.)

('dL)/('dt)|\_(t =0,3) =2,35

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

**[]**

-----

j-111

# !!4 Optimierung und Regressionsrechnung

Ziel jeder Wirtschaftstätigkeit ist, Güter möglichst wirksam einzusetzen.

Kosten und Stückkosten sollen minimiert, Gewinne maximiert werden. Gleichzeitig soll nachhaltig gewirtschaftet werden, was bedeutet, dass nachfolgende Generationen ein intaktes ökonomisches, ökologisches und soziales System vorfinden.

Allgemein führen zahlreiche Probleme aus verschiedenen Bereichen auf die Aufgabe, eine Größe zu optimieren. Gesucht ist das Minimum oder Maximum einer Größe, die von zwei oder mehreren Variablen abhängt (Zielfunktion). Die Variablen hängen durch eine oder mehrere Nebenbedingung(en) voneinander ab.

Hier werden nur Optimierungsaufgaben behandelt, bei denen sich durch Ersetzen von Variablen die Zielfunktion auf eine Funktion in einer Variablen reduzieren lässt.

Von dieser Zielfunktion kann man mithilfe der Differenzialrechnung das absolute Extremum ermitteln.

##### Meine Ziele?

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) die Idee der Optimierung unter einschränkenden Bedingungen erklären und anhand des Modells: Hauptbedingung a \*b unter der Nebenbedingung a +b =konstant und die Hauptbedingung a +b unter der Nebenbedingung a \*b =konstant, modellieren und berechnen,

-) das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate und die zugrundeliegenden Ideen erläutern und die Güte der Ergebnisse bewerten,

-) mit Technologieeinsatz für vorgegebene Modellfunktionen mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate Funktionsgleichungen bestimmen,

-) den Korrelationskoeffizienten nach Pearson berechnen und interpretieren.\||

---

##### Worum geht's hier?

##### Wurfhöhe

Ein Ball wird aus 3 m Höhe lotrecht mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s nach oben geworfen. Die Funktion h beschreibt seine Höhe in Abhängigkeit von der Zeit. h(t) =3 +15 \*t -5 \*t^2

t Zeit nach dem Abwurf in Sekunden

h(t) Höhe in Metern nach t Sekunden

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die maximale Höhe, die der Ball erreicht.

Lösung:

Aus der Grafik in der Randspalte können Sie die maximale Höhe h ~~14 m ablesen.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Berechnung mithilfe der Differenzialrechnung:

h(t) =3 +15 \*t -5 \*t^2

h'(t) =15 -10 \*t

0 =15 -10 \*t

t =1,5;

h\_(max) =h(1,5) =14,25

Der Ball erreicht nach 1,5 Sekunden eine maximale Höhe von 14,25 m.

|T|: Sie haben bereits einige Optimierungsaufgaben erfolgreich gelöst - wie zum Beispiel die nebenstehende Aufgabe.

In allen bisherigen Beispielen hatten Sie eine Funktion in einer Variablen. Bei den Optimierungsaufgaben in diesem Kapitel werden Sie zunächst von einer Formel in zwei Variablen ausgehen, beispielsweise von dem Flächeninhalt eines Rechtecks A =a \*b. Aus dieser Formel gewinnen Sie durch eine Nebenbedingung eine Funktion in nur einer Variable, von der Sie dann den Extremwert in bekannter Weise berechnen (oder durch Ablesen ermitteln) können.

j-112

## !!4.1 Optimierung

+++Beispiel 4.1: |A, B|

Grundstück mit maximalem Flächeninhalt

Mit einem 12 m langen Zaun soll ein möglichst großes rechteckiges Grundstück begrenzt werden.

Bestimmen Sie die Abmessungen dieses Grundstücks und den maximalen Flächeninhalt

a.)

durch Probieren und grafisch (mit ganzzahligen Werten) und

b.)

rechnerisch.

---

{{Lösung auf Seite 112 und 113}}

Lösung:

a.)

Lösung durch Probieren und grafische Lösung Skizze (Modell) in der Randspalte.

{{Grafik: Rechteck mit Länge y und Breite x}}

y ist die Länge des rechteckigen Grundstücks, x die Breite. Daher ist der Umfang des Grundstücks 2 \*x +2 \*y.

12 m Zaun stehen zur Begrenzung des Grundstücks zur Verfügung: 2 \*x +2 \*y =12

Verwenden Sie für die Seiten des Rechtecks alle zulässigen ganzzahligen Längen, wie beispielsweise das Paar 5 m und 1 m. Zulässig sind Rechteckseiten x und y, für die 2 \*x +2 \*y =12 gilt.

x in m: 0

y in m: 6

A in m^2: 0

Grundstück: A =0 m^2

---

x in m: 1

y in m: 5

A in m^2: 5

Grundstück: A =5 m^2 {{Grafik: Beschriftete Skizze des Grundstücks}}

---

{{Tabelle aufgelöst}}

x in m: 2

y in m: 4

A in m^2: 8

Grundstück: A =8 m^2 {{Grafik: Beschriftete Skizze des Grundstücks}}

---

x in m: 3

y in m: 3

A in m^2: 9

Grundstück: A =9 m^2 {{Grafik: Beschriftete Skizze des Grundstücks}}

---

x in m: 1

y in m: 2

A in m^2: 8

Grundstück: A =8 m^2 {{Grafik: Beschriftete Skizze des Grundstücks}}

---

x in m: 5

y in m: 1

A in m^2: 5

Grundstück: A =5 m^2 {{Grafik: Beschriftete Skizze des Grundstücks}}

---

x in m: 6

y in m: 0

A in m^2: 0

Grundstück: A =0 m^2

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Flächeninhalt des Rechtecks als Funktion der Seitenlänge x erreicht für x =3 m den größtmöglichen Wert: A\_(max) =9 m^2

Den Flächeninhalt des Rechtecks kann man als Funktion der Seite x darstellen und aus der Grafik den maximalen Flächeninhalt A ablesen.

Man erkennt, dass für das quadratische Grundstück mit x =y =3 m der Flächeninhalt mit 9 m^2 maximal ist.

---

j-113

b.)

Rechnerische Lösung:

Flächenformel: Die Fläche A hängt von x und y ab. Sie soll maximal werden.

A =x \*y

Die Nebenbedingung ist eine Gleichung, die den Zusammenhang der beiden Variablen x und y beschreibt.

2x +2y =12

y =6 -x

Wenn Sie die Variable y aus der Nebenbedingung in die Flächenformel einsetzen, erhalten Sie die Gleichung der Zielfunktion A in der Variablen x.

A(x) =x \*(6 -x)

Von dieser Zielfunktion ermitteln Sie das absolute Maximum in der Definitionsmenge [0; 6].

A(x) =6 \*x -x^2

Erste Ableitung der Zielfunktion

A'(x) =6 -2 \*x

Die zweite Ableitung der Zielfunktion ist konstant -2. Die Kurve ist daher rechtsgekrümmt.

A''(x) =-2 <0

Relative Extrema:

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum

A'(x) =0,

also

6 -2x =0

x =3

Hinreichende Bedingung für ein relatives Maximum

A''(3) =-2 <0

Relatives Maximum der Zielfunktion Das relative Maximum der Zielfunktion ist zugleich ihr absolutes, weil die Kurve rechtsgekrümmt ist.

A\_(max) =A(3) =18 -9 =9

Setzen Sie x =3 in die Nebenbedingung y =6 -x ein. Sie erhalten für die zweite Grundstücksseite y =3.

y =6 -3 =3

Sie kommen zum selben Ergebnis wie oben durch Probieren:

Der Flächeninhalt ist maximal, wenn das Grundstück ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 m ist. Der maximale Flächeninhalt beträgt 9 m^2.

---

|T|: Der Extremwert kann auf zwei Arten berechnet werden:

1. mit der ursprünglichen Formel

A =x \*y =3 \*3 =9 und

2. mit der Zielfunktion

A(x) =6 \*x -x^2

A(3) =18 -9 =9

-----

+++Beispiel 4.2: |A, B|

Maximaler Flächeninhalt

Angrenzend an eine Hausmauer soll mit 12 m Maschendraht eine möglichst große rechteckige Fläche abgegrenzt werden, wobei eine Seite durch die Hausmauer begrenzt wird.

a.)

Erstellen Sie eine beschriftete Skizze.

---

b.)

Ermitteln Sie die Abmessungen dieses Grundstücks und den maximalen Flächeninhalt grafisch und rechnerisch.

---

Lösung:

a.)

Skizze: siehe Randspalte

{{Grafik: Skizze eines Rechtecks mit Länge y und Breite x}}

y ist die Länge des Rechtecks x die Breite.

Es stehen 12 m Zaun zur Verfügung 2 \*x +y =12

---

b.)

Grafische und rechnerische Lösung:

Flächenformel: A soll ein Maximum werden.

A =x \*y

Nebenbedingung

2 \*x +y =12

Setzen Sie y in die Gleichung der Zielfunktion ein, und Sie erhalten die Zielfunktion in der Variablen x. Ermitteln Sie den Extremwert dieser Funktion in der Definitionsmenge [0; 6] mithilfe der ersten Ableitung.

y =12 -2 \*x

A(x) =x \*(12 -2x)

A(x) =12x -2x^2

A'(x) =12 -4x

A''(x) =-4 <0

-----

j-114

+++Beispiel 4.2: |A, B|

Maximaler Flächeninhalt (Fortsetzung)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Flächeninhalt des Rechtecks als Funktion der Seitenlänge x erreicht für x =3 m den größtmöglichen Wert:

A\_(max) ~~18 m^2

{{Tabelle aufgelöst}}

x in m: 0

y in m: 12

A in m^2: 0

---

x in m: 1

y in m: 10

A in m^2: 10

---

x in m: 2

y in m: 8

A in m^2: 16

---

x in m: 3

y in m: 6

A in m^2: 18

---

x in m: 4

y in m: 4

A in m^2: 16

---

x in m: 5

y in m: 2

A in m^2: 10

---

x in m: 6

y in m: 0

A in m^2: 0

---

Relative Extrema:

Notwendige Bedingung

A'(x) =0

12 -4x =0

x =3

Hinreichende Bedingungen für ein Maximum

A''(3) =-4 <0

Relatives Maximum der Zielfunktion

A(3) =18

Einsetzen in die Nebenbedingung

y =12 -2 \*3 =6

A =3 \*6 =18

Beide Randwerte A(0) und A(6) sind 0.

Das relative Maximum der Zielfunktion ist daher zugleich ihr absolutes.

Sie erhalten damit, was Sie schon aus dem Graphen von A ablesen konnten:

Unter der angegebenen Bedingung ist das Rechteck mit der größten Fläche 6 m lang und 3 m breit. Der maximale Flächeninhalt beträgt 18 m^2.

-----

+++Beispiel 4.3: |A, B|

Schornstein mit minimalem Materialverbrauch

Zwei rechteckige Schornsteinzüge sollen nebeneinander hochgezogen werden (siehe Randspalte), wobei die Trennwand und die Seitenwände eine Dicke von einheitlich 12 cm bekommen sollen.

Der Innenquerschnitt soll je 360 cm^2 betragen.

Der Materialverbrauch soll minimal sein.

a.)

Berechnen Sie die Maße des Schornsteins, dessen Höhe unberücksichtigt bleibt.

---

b.)

Berechnen Sie die minimale Querschnittsfläche des Kamins.

---

{{Grafik: Skizze des Schornsteins}}

Ein Schornstein hat die Innenabmessungen x und y.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Aus dem Graphen können Sie ablesen, dass bei x ~~16 cm die minimale Querschnittsfläche etwa 2400 cm^2 beträgt.

|!|: Auf die hinreichende Bedingung (f'(x) =0 und f''(x) \=0) und die explizite Berechnung der Randextrema kann man verzichten, wenn die Zielfunktion grafisch dargestellt und aus dieser Darstellung der Extremwert abgelesen wird.

---

Lösung:

a.)

Um den Materialverbrauch zu minimieren, muss die Querschnittsfläche A minimal sein.

Die Querschnittsfläche A soll ein Minimum werden.

A =(2x +12 \*3) \*12 \*2 +3y \*1

A =48x +36y +864

Nebenbedingung

x \*y =360

y =(360)/x

Gleichung der Zielfunktion in der Variablen x >0

A(x) =48x +(12960)/x +864

Der Wertetabelle kann man entnehmen, dass das Minimum in der Nähe von x =15 cm liegt.

{{Tabelle aufgelöst}}

x in cm: 5

y in cm: 72

A in cm^2: 3696

---

x in cm: 10

y in cm: 36

A in cm^2: 2640

---

x in cm: 15

y in cm: 24

A in cm^2: 2448

---

x in cm: 20

y in cm: 18

A in cm^2: 2427

---

x in cm: 25

y in cm: 14,4

A in cm^2: 2582,4

---

Erste Ableitung der Zielfunktion

A'(x) =48 -(12960)/(x^2)

Notwendige Bedingung für relatives Extremum

A'(x) =0 --> 48 -(12960)/(x^2)

Der negative x-Wert ist kein mögliches Kaminmaß.

x ='w(270) ~~16,4

y =(360)/'w(270) ~~21,9

Hinreichende Bedingung für relatives Extremum

A''(x) =(25920)/(x^3) >0 für x >0

Der Materialverbrauch wird für die Kaminmaße x =16,4 cm und y =21,9 cm minimal.

---

b.)

A('w(270) ~~2441,44

Die zugehörige minimale Querschnittsfläche beträgt ca. 2440 cm^2.

-----

j-115

##### Lösungsweg für Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben)

||1. Schreiben Sie die Berechnungsformel für die Größe an, deren Wert ein Extremum werden soll.

2. Ermitteln Sie die Nebenbedingung (evtl. auch mehrere), die den Zusammenhang der Variablen beschreibt.

3. Ersetzen Sie in der Berechnungsformel die Variable(n), die Sie aus der Nebenbedingung ermittelt haben.

Sie erhalten so eine Zielfunktion in nur einer Variablen.

4. Die gewonnene Zielfunktion stellen Sie tabellarisch und grafisch dar.

Lesen Sie daraus näherungsweise den gesuchten Extremwert ab.

5. Berechnen Sie das gesuchte Extremum (relative Extrema und absolutes Extremum).\||

---

Lösungsweg:

1. Berechnungsformel (Hauptbedingung)

2. Nebenbedingung

3. Ermitteln der Zielfunktion durch Einsetzen der Nebenbedingung

4. Tabellarische und grafische Darstellung und Ablesen eines Näherungswertes des Extremums

5. Berechnung mithilfe der Differenzialrechnung

---

+++Beispiel 4.4: |A, B|

Konservendose mit minimalem Materialverbrauch

Handelsübliche Konservendosen haben (angenähert) eine zylindrische Form.

Der Materialverbrauch bei der Herstellung von Dosen mit einem Volumen von 500 ml soll minimal sein.

Ermitteln Sie die Maße der Dose

a.)

grafisch und rechnerisch,

b.)

mit dem GTR.

---

{{Lösung auf Seite 115 und 116}}

{{Grafik: Zylinder}}

Drehzylinder mit Radius r und Höhe h:

Grundfläche G =r^2'pi

Mantel M =2r'pi h

Oberfläche O =2G +M =2r^2'pi +2r'pi h

Volumen V =G\_h =r^2'pi h

|T| Raummaße:

1 Liter =1 L =1 dm^3

1 ml =1 cm^3

---

Lösung:

a.)

Grafische und rechnerische Lösung:

Die Oberfläche O soll ein Minimum werden.

O =2r^2'pi +2r'pi h

Nebenbedingung

r^2'pi h =500

h =(500)/(r+2'pi)

O(r) =2r^2'pi +2r'pi \*(500)/(r^2'pi)

Zielfunktion in der Variablen r >0

{{Tabelle aufgelöst}}

r in cm: 2

h in cm: 39,79

O in cm^2: 525,13

---

r in cm: 4

h in cm: 9,95

O in cm^2: 350,53

---

r in cm: 8

h in cm: 2,49

O in cm^2: 527,12

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Wertetabelle und der Grafik können Sie entnehmen, dass das Minimum in der Nähe von r =4 cm liegt. Für einen Radius von etwas mehr als 4 cm ist die Oberfläche mit etwa 350 cm^2 minimal.

Erste Ableitung der Zielfunktion

O'(r) =4r'pi -10200

Notwendige Bedingung für ein Extremum

O'(r) =0

4r'pi -(1000)/(r^2) =0

r ='w[3]((250)/('pi)) ~~4,3

h ~~8,6

Hinreichende Bedingung für ein Minimum

O''(r) =4'pi +(2000)/(r^3) >0 für r >0

O(4,3) ~~348,7

Eine Dose mit einem Volumen von 500 ml hat den minimalen Materialbedarf von etwa 348,7 cm^2, wenn der Radius etwa 4,3 cm und die Höhe etwa 8,6 cm beträgt. Der Durchmesser des Zylinders ist gleich der Höhe.

Die Dose mit minimalem Materialbedarf ist also ein gleichseitiger Zylinder.

{{Grafik: Die berühmteste Suppendose der Welt. Andy Warhol (1962)}}

---

j-116

b.)

Lösung mit dem GTR:

Verwenden Sie für r die Variable X, für h die Funktion Y\_1 und für die Oberfläche O die Funktion Y\_2.

Geben Sie die Nebenbedingung und die Zielfunktion im Y=-Editor ein, ermitteln Sie für r =0, 1, 2, ..., 8 mit 2nd [TABLE] eine Wertetabelle.

Stellen Sie die Zielfunktion in einem geeigneten Grafikfenster dar.

Über das Menü 2nd [CALC] können Sie mit dem Befehl 3:minimum den Extremwert berechnen.

{{Grafik: Berechnung mit GTR}}

-----

+++Beispiel 4.5: |A, B|

Karton mit maximalem Volumen

Von einem Karton im A4-Format (a =29,7 cm und b =21 cm) werden - wie in der Randspalte dargestellt - an den Ecken Quadrate abgeschnitten und der Karton zu einer Schachtel mit maximalem Volumen gefaltet.

{{Grafik: Gefaltete Schachtel}}

Die aus dem Karton gefaltete Schachtel hat die Länge y, die Breite z und die Höhe x.

Für das Volumen V einer Schachtel gilt: V =x \*y \*z

a.)

Speziell für den dargestellten Karton gilt:

V(x) =x \*(a -2 \*x) \*(b -2 \*x)

V(x) =x \*(29,7 -2 \*x) \*(21 -2 \*x)

Zeigen Sie, dass diese Volumsformel richtig ist.

---

b.)

Ermitteln Sie die Länge y, die Breite z und die Höhe x der Schachtel und ihr maximales Volumen.

-) grafisch und rechnerisch sowie

-) mit dem GTR.

---

{{Lösung auf Seite 116 und 117}}

Lösung:

a.)

Sie können y und z durch x ausdrücken.

y =a -2 \*x =29,7 -2 \*x

z =b -2 \*x =21 -2 \*x

V(x) =x \*(a -2 \*x) \*(b -2 \*x)

V(x) =x \*(29,7 -2 \*x) \*(21 -2 \*x)

---

b.)

Grafische und rechnerische Lösung:

Zielfunktion in der Variablen x 'el [0; 10,5]

V(x) =4x^3 -101,4x^2 +623,7x

{{Tabelle aufgelöst}}

x in cm: 0

V in cm^3: 0,00

---

x in cm: 2

V in cm^3: 8,73,8

---

x in cm: 4

V in cm^3: 1128,4

---

x in cm: 6

V in cm^3: 955,8

---

x in cm: 8

V in cm^3: 548,0

---

x in cm: 10

V in cm^3: 97,0

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Für eine Höhe von etwa 4 cm ist das Volumen der Schachtel mit etwa 1130 cm^3 maximal.

j-117

Erste Ableitung der Zielfunktion

V'(x) =12x^2 -202,8x +623,7

Zweite Ableitung der Zielfunktion

V''(x) =24x -202,8

Notwendige Bedingung für ein Extremum

V'(x) =0

12x^2 -202,8x +623,7 =0

x\_1 ~~4,04;

x\_2 ~~12,86 \'el D

Hinreichende Bedingung für ein Maximum

V''(4,04) ~~-105,8 <0

V(4,04) ~~1128,5

Die Schachtel hat das maximale Volumen von etwa 1128,5 cm^3 für die Höhe x ~~4 cm.

Lösung mit dem GTR:

Geben Sie die beiden Nebenfunktionen und die Zielfunktion im Y=-Editor ein.

{{Grafik: Lösung mit GTR}}

-----

##### Übungsaufgaben

+++4.001 |A, B, C, D|

Mit einem 40 Meter langen Draht ist ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt einzugrenzen.

a.)

Erstellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks. Erstellen Sie die Gleichung für die Nebenbedingung.

Erstellen Sie die Gleichung der Zielfunktion in Abhängigkeit von einer Seitenlänge des Rechtecks.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie die Zielfunktion für einen sinnvollen Definitionsbereich dar.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie jene Seitenlänge ab, für die die Zielfunktion maximal wird. Lesen Sie den zugehörigen maximalen Flächeninhalt ab.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Länge der Rechteckseiten, die zu einem maximalen Flächeninhalt führen.

**[]**

-----

+++4.002 |A, B, C|

Zerlegen Sie die Zahl 40 so in zwei Summanden, dass ihr Produkt ein Maximum wird.

a.)

Führen Sie diese Optimierungsaufgabe grafisch und rechnerisch durch.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie das maximale Produkt der beiden Summanden.

**[]**

-----

+++4.003 |A, B|

Mit einem 20 m langen Zaun will ein Bauer angrenzend an eine Hausmauer eine möglichst große Fläche abgrenzen. Eine Seite wird durch die Hausmauer begrenzt.

Berechnen Sie die Abmessungen der maximalen Fläche.

**[]**

-----

+++4.004 |A, B|

Frau Huber möchte mit a) 20 m und b) 25 m Zaun einen rechteckigen Bereich abgrenzen. Dabei kann Frau Huber a) 10 m und b) 5 m Zaun vom angrenzenden Grundstück verwenden.

Die Fläche soll möglichst groß werden.

Berechnen Sie die Seitenlängen.

**[]**

-----

j-118

+++4.005 |A, B, C|

Frau Meyer möchte ein rechteckiges Gartenbeet mit einem Flächeninhalt von 50 m^2 anlegen und umzäunen. Eine Seite des Gartenbeetes verläuft an der Grenze des Nachbargrundstücks. Diese Seite muss nicht eingezäunt werden, da die Grundstücke schon durch einen Zaun abgegrenzt sind.

Die Kosten für einen Laufmeter Zaun betragen € 8,00.

Die Kosten für die Umzäunung des Gartenbeetes sollen minimal sein.

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion in Abhängigkeit einer Seitenlänge.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie die Kostenfunktion für einen sinnvollen Definitionsbereich dar.

**[]**

---

c) Berechnen Sie, wie Frau Meyer die Seitenlängen des Gartenbeetes wählen muss.

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand des Graphen der Kostenfunktion.

**[]**

-----

+++4.006 |A, B, D|

Ein Autohändler will eine Ausstellungshalle mit einer Ausstellungsfläche von 150 m^2 bauen. Dabei sollen die Seitenfronten gemauert sein, die Vorder- und Rückfront soll aus Glas sein.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Die Glasfront kostet pro Meter € 900,00, die Mauer pro Meter € 600,00. Die Kosten sollen möglichst gering sein.

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K in Abhängigkeit von der Seitenlänge der Glasfront.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die kostengünstigsten Abmessungen der rechteckigen Grundfläche sowie die zugehörigen Kosten.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, ob die Abmessungen geändert werden müssen, wenn die Glasfront pro Meter € 990,00 und die Mauer pro Meter € 660,00 kostet.

**[]**

-----

+++4.007 |A, B, D|

Bei der Errichtung eines Wirtschaftsgebäudes mit rechteckiger Grundfläche fallen bei der Vorderfront Kosten von € 2100,00 pro Meter an, bei der Rückfront € 1500,00 pro Meter und bei den Seitenfronten € 1200,00 pro Meter.

a.)

Die Gesamtkosten für die Wände dürfen € 72000,00 betragen.

Die Fläche soll möglichst groß werden.

Berechnen Sie die Abmessungen und die maximale Fläche des Wirtschaftsgebäudes.

**[]**

---

b.)

Die Fläche des Wirtschaftsgebäudes soll 96 m^2 betragen.

Die Kosten sollen möglichst klein sein.

Berechnen Sie die Abmessungen und die minimalen Kosten des Wirtschaftsgebäudes.

**[]**

-----

+++4.008 |A, B, C|

Ein rechteckiger offener Kamin wird mit 10 cm breiten Ziegelsteinen gemauert, wie in der Randspalte skizziert. Die Innenfläche soll 2500 cm^2 betragen.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Der Materialverbrauch soll minimal sein.

a.)

Erstellen Sie eine Funktion M, die die von den Ziegeln bedeckte Fläche (und damit den Materialverbrauch) in cm^2 in Abhängigkeit der Länge y beschreibt.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Innenabmessungen x und y des Kamins.

**[]**

---

c.)

Kontrollieren Sie mithilfe des Graphen von M, ob Ihr Ergebnis tatsächlich dem minimalen Materialverbrauch entspricht.

**[]**

-----

j-119

+++4.009 |A, B, C, D|

Aus einem Blatt Papier (A4-Format mit a =29,7 cm und b =21 cm) soll gemäß der Skizze in der Randspalte eine quaderförmige Schachtel samt Deckel mit maximalem Volumen hergestellt werden. Das Volumen der Schachtel kann mithilfe der Funktion V beschrieben werden.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

V(x) =x \*(b -2 \*x) \*(a -2 \*x)/2

x Höhe der Schachtel in cm

V(x) Volumen der Schachtel in cm^3 bei einer Höhe x

a.)

Zeigen Sie den Zusammenhang der gegebenen Funktionsgleichung mit der Skizze in der Randspalte, indem Sie den Faktoren des Funktionsterms die entsprechende Länge in der Skizze zuordnen.

**[]**

---

b.)

Argumentieren Sie, welcher Definitionsbereich sinnvoll ist.

Stellen Sie die Funktion V in diesem Bereich grafisch dar.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie aus dem Graphen ungefähr die Größe des maximalen Volumens und der dazugehörigen Kantenlänge x ab.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie mithilfe der in c) abgelesenen Kantenlänge x die ungefähre Länge der übrigen Kanten.

**[]**

-----

+++4.010 |A, B, C|

Eine Firma stellt Verpackungskartons nach dem in der Randspalte dargestellten Schnittmuster her. Aus Spezialkarton im A4-Format (Länge a =29,7 cm und Breite b =21 cm) sollen Schachteln für Waschpulver mit maximalem Volumen hergestellt werden.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Das Volumen der Schachtel kann mithilfe der Formel V =x \*y \*(27,7 -2 \*y) berechnet werden.

a.)

Bestimmen Sie mithilfe der gegebenen Formel und der Darstellung in der Randspalte die Breite der Klebefalze f.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie mithilfe der Grafik eine Nebenbedingung für die Kantenlänge x. Setzen Sie diese in die gegebene Formel für V ein.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie mithilfe der in b) bestimmten Funktion V die Kantenlänge x, für die das Volumen der Schachtel maximal wird, sowie das maximale Volumen.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Länge der Kante y und der Höhe h.

**[]**

-----

+++4.011 |A, B|

Viele der handelsüblichen 1-Liter-Milchpackungen sind quaderförmig und haben eine quadratische Grundfläche.

Der Materialverbrauch soll möglichst klein sein.

Berechnen Sie die Grundkante, die Höhe und den minimalen Materialverbrauch laut Skizze.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

**[]**

-----

+++4.012 |A, B|

Eine Regentonne soll 100 Liter fassen.

Der Materialverbrauch soll minimal sein.

Modellieren Sie die Regentonne näherungsweise als (oben offenen) Drehzylinder.

Berechnen Sie den Radius und die Höhe einer solchen Regentonne.

**[]**

-----

+++4.013 |A, B|

Eine Firma stellt zylindrische, oben offene Kaffeedosen mit 1 dm^3 Volumen her.

Die Kosten für die Herstellung des Bodens betragen 0,10 Cent/(cm^2), für die Wand 0,03 Cent/(cm^2).

Die Herstellungskosten sollen minimal sein.

Berechnen Sie die optimalen Abmessungen einer solchen Dose.

|T|: Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h besitzt das Volumen

V =r2'pi h, den Mantel M =2r'pi h und die Oberfläche O =2G +M =2r^2 'pi +2r'pi h =2r'pi \*(r +h).

-----

j-120

+++4.014 |A, B|

Der Querschnitt eines Abwasserkanals besteht aus einem Rechteck mit auf gesetztem Halbkreis. Der Querschnittsumfang des Abwasserkanals ist 10 m.

Die Querschnittsfläche soll maximal werden.

a.)

Erstellen Sie eine beschriftete Skizze.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie eine Gleichung für die Nebenbedingung.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie eine passende Zielfunktion in Abhängigkeit vom Radius r des Halbkreises.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie jenen Radius, für den die Querschnittsfläche maximal wird, und die maximale Querschnittsfläche.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus d) die Seitenlängen des Rechtecks.

**[]**

-----

+++4.015 |A, B, C, D|

Ein oben offener Behälter, der 200 Liter fassen soll, hat die Form eines Zylinders mit unten eingefügter Halbkugel. Zur Erhöhung der Stabilität ist diese Halbkugel in das Innere des Behälters gewölbt.

Das Material zur Herstellung der Oberfläche soll minimal werden.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

|T|: Eine Kugel mit dem Radius r hat die Oberfläche O =4r^2'pi und das Volumen V =(4r^2'pi)/3.

a.)

Erstellen Sie eine Gleichung für die Nebenbedingung.

**[]**

---

b.)

Zeigen Sie, dass die Funktion O eine passende Zielfunktion ist.

O(r) =(10 \*r^2 \*'pi)/3 +(400)/4

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, in welcher Einheit der Radius in der Formel aus b) eingesetzt werden muss und welche Einheit sich für die berechnete Oberfläche ergibt.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den Radius und die Oberfläche des Behälters.

**[]**

---

e.)

Prüfen Sie anhand des Graphen von O nach, dass die berechnete Extremstelle ein Minimum ist.

**[]**

---

f.)

Berechnen Sie mithilfe der Nebenbedingung die Höhe des Behälters.

**[]**

-----

+++4.016 Fruchtsaft wird manchmal in 2-Liter-Flaschen abgefüllt.

Wenn man den Flaschenhals nicht berücksichtigt, entspricht die Form dieser Flaschen (genähert) einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel (vgl. Randspalte). Die Flasche soll so dimensioniert werden, dass der Glasverbrauch minimal ist.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

|T|: Eine Kugel mit dem Radius r hat die Oberfläche O =4r^2'pi und das Volumen V =(4r^2'pi)/3.

a.)

Erstellen Sie eine Gleichung für die Nebenbedingung.

**[]**

---

b.)

Zeigen Sie, dass die Funktion O eine passende Zielfunktion ist.

O(r) =(5 \*r^2 \*'pi)/3 +4/r

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Radius und die Oberfläche des Behälters.

**[]**

---

d.)

Zeigen Sie anhand des Graphen von O, dass die berechnete Extremstelle ein Minimum ist.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie mithilfe der Nebenbedingung die Höhe des Behälters.

-----

+++4.017 |A, B, C|

Ein Behälter, der 0,5 Liter fassen soll, hat die Form eines Zylinders mit unten A B eingefügter Halbkugel und aufgesetzter Halbkugel.

Zur Erhöhung der Stabilität ist die untere Halbkugel in das Innere des Behälters gewölbt.

Bei der Herstellung sind die Kosten pro cm^2 für die Halbkugeln 5-mal so hoch wie die Kosten pro cm^2 für den Zylindermantel.

Die Kosten für die Herstellung sollen minimal werden.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

|T|: Eine Kugel mit dem Radius r hat die Oberfläche O =4r^2'pi und das Volumen V =(4r^2'pi)/3.

a.)

Erstellen Sie eine Gleichung für die Nebenbedingung, in der die Höhe und der Radius des Behälters in cm eingesetzt werden.

**[]**

---

b.)

Zeigen Sie, dass die Funktion K eine passende Zielfunktion ist.

K(r) =20 \*r^2 \*'pi +(1000)/r

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Radius und die Höhe des Behälters.

**[]**

-----

j-121

## !!4.2 Regressionsrechnung

Häufig stellt sich die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen zwei Variablen gibt, und wenn ja, welchen?

Mit der Regressionsrechnung kann man diese Fragen beantworten.

Die Grundlage der Regressionsrechnung ist die Methode der kleinsten (Fehler-) Quadrate.

+++Beispiel 4.6: |C, D|

Zusammenhang zwischen Körpergröße und Körpermasse

Von fünf zufällig gewählten Schülerinnen wurden Körpergröße und Körpermasse gemessen.

Zeigen Sie, indem Sie die fünf Datenpaare in einem Koordinatensystem darstellen, dass es einen Zusammenhang zwischen Körpergröße und Körpermasse gibt.

{{Tabelle aufgelöst}}

Name: Antonia

Körpergröße in cm: 165

Körpermasse in kg: 56,3

---

Name: Berta

Körpergröße in cm: 178

Körpermasse in kg: 71,5

---

Name: Claudia

Körpergröße in cm: 171,5

Körpermasse in kg: 70,3

---

Name: Dorothea

Körpergröße in cm: 160,3

Körpermasse in kg: 63,4

---

Name: Erika

Körpergröße in cm: 175

Körpermasse in kg: 67,3

---

{{Grafik: nicht übertragen}}

Sie können den - nicht überraschenden - Zusammenhang "Größere Schülerinnen haben eine größere Masse" feststellen.

-----

##### Definition: Zweidimensionale Verteilung

||Wird eine Grundgesamtheit hinsichtlich zweier Merkmale durch eine Stichprobe untersucht, liegt eine zweidimensionale Verteilung von Merkmalwerten vor.\||

---

+++Beispiel 4.6: |C|

Zusammenhang zwischen Körpergröße und Körpermasse (Forts.)

Die Datenpaare (x\_i|y\_i) werden als Punkte im Streudiagramm (engl. Scatter Plot) in der Randspalte in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die dargestellten Punkte bilden eine Punktewolke.

Gesucht ist eine Funktion, die den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Körpermasse am besten wiedergibt.

Die Frage ist nur, welche Funktion ist "die beste".

Die einfachste Funktion ist eine Gerade mit der Gleichung: y =a \*x +b

Die Einflussgröße x (unabhängige Variable, Körpergröße) bedingt die Werte der Zielgröße y (abhängige Variable, Körpermasse).

{{Grafik: nicht übertragen}}

Welche der Geraden ist für die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Körpermasse und Körpergröße am besten geeignet?

-----

Die Ermittlung einer Regressionsgeraden ist mit Technologie rasch möglich.

Um die Grundlagen dieser Berechnungen zu verstehen, sind Kenntnisse zur Ermittlung von relativen Extremwerten von Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen notwendig.

Im folgenden Beispiel wird die zugehörige mathematische Vorgangsweise gezeigt.

j-122

+++Beispiel 4.7: |B|

Extremum einer Funktion mit zwei Variablen

Ermitteln Sie das relative Extremum der Funktion f mit

f(x, y) =x^2 +x \*y +2 \*y^2 +3 \*x +5 \*y.

Lösung:

{{Grafik: nicht übertragen}}

Aus einer geeigneten Grafik, in der der Funktionswert f(x, y) als z-Koordinate dargestellt wird, kann man ablesen, dass die Funktion einen Tiefpunkt besitzt.

Alle drei Koordinaten des Tiefpunktes scheinen kleiner als null zu sein.

Zur Berechnung verwendet man die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines relativen Extremums an der Stelle (x0|y0):

f\_x(x\_0|y\_0) =0 und

f\_y(x\_0|y\_0) =0.

Beide partielle Ableitungen müssen null sein.

Auf die hinreichende Bedingung wird hier verzichtet.

Sie erhalten:

f\_x(x, y) =2x +y +3

f\_x ist die partielle Ableitung der Funktion f nach x.

f\_y(x, y) =x +4y +5

f\_y ist die partielle Ableitung der Funktion f nach y.

Die notwendige Bedingung für relative Extrema ergibt:

f\_x =0

f\_y =0

-->

2x +y =-3

-7x =7

<-->

-7x =7

y =-1

-->

(-1|-1) ist die Stelle des Extremums.

f(-1, -1) =1 +1 +2 -3 -5 =-4

Der Tiefpunkt T lautet daher T(-1|-1|-4).

-----

Die Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate wird zur Anpassung einer Näherungskurve an ein Streudiagramm verwendet.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Gegeben sind n Wertepaare (x\_i|y\_i), zu denen die Regressionsgerade y =a \*x +b gesucht wird.

-) Passen Sie die Gerade mit der Gleichung y =a \*x +b so an das Streudiagramm an, dass die Summe F der Fehlerquadrate der vertikalen Abweichungen minimal ist.

-) Der Fehler zwischen dem berechneten y-Wert auf der Geraden und dem gemessenen y-Wert für das Wertepaar (x\_i|y\_i) ist

e\_i =y\_i -(ax\_i +b)

i =1, 2, ..., n

{{ZI: y\_i: Messwert

ax\_i +b: Modellwert}}

-) Die Fehler e\_i heißen Residuen. Die Residuen sind die Differenzen zwischen den Messwerten y\_i und den Modellwerten y(x\_i).

residuum: lateinisch für Rest

-) Um zu vermeiden, dass bei der Addition der Fehler für alle Wertepaare die Fehlersumme sich wegen verschiedener Vorzeichen reduziert -obwohl beachtliche Abweichungen der Messwerte von der Geraden vorhanden sind -, verwendet man anstelle der gewöhnlichen Fehler die Fehlerquadrate.

Die Summe F der Fehlerquadrate der n beobachteten Wertepaare (x\_i|y\_i) beträgt

F(a, b) ='Si[i =1; n](e\_i^2) ='Si[i =1; n](y\_i -ax\_i -b)^2

---

Alle Summen werden hier kurz ohne Summationsgrenzen geschrieben.

Außerdem wird auf die Angabe der beiden Variablen verzichtet.

Für F\_a(a, b) wird kurz F\_a geschrieben.

---

Die Modellparameter a und b werden so berechnet, dass F minimal wird. F ist eine Funktion in den unabhängigen Variablen a und b.

F wird minimal, wenn das Gleichungssystem F\_a =0 und F\_b =0 erfüllt ist.

F\_a ='Si(2 \*(y\_i -ax\_i -b) \*(x\_i)) ='Si(2 \*(ax\_i +b -y\_i) \*x\_i)

F\_b ='Si(2 \*(y\_i -ax\_i -b) \*(-1)) ='Si(2 \*(ax\_i +b -y\_i) \*1)

j-123

Multiplizieren Sie die Terme jeweils aus und vertauschen Sie die Summanden in der Form, dass Sie zuerst alle Summanden jeder Klammer, dann alle zweiten Summanden und schließlich alle dritten Summanden addieren.

Heben Sie die jeder Teilsumme gemeinsamen Faktoren heraus. Sie erhalten:

F\_a =2 \*[a \*2 'Si(x\_i^2) +b \*'Si(x\_i) -'Si(x\_i y\_i)]

F\_b =2 \*[a \*2 'Si(x\_i) +b \*n -'Si(y\_i)]

F\_a =0 --> a \*'Si(x\_i^2) +b \*'Si(x\_i) ='Si(x\_i y\_i)

F\_b =0 --> a \*'Si(x\_i) +b \*n ='Si(y\_i)

Normalgleichungen für a und b der Regressionsgeraden y =ax +b, falls die Summe der Quadrate der vertikalen Fehler minimal ist.

F\_a ist die partielle Ableitung der Funktion F nach a, F\_b die nach b.

Sie sind damit in der Lage, für eine zweidimensionale Verteilung die zugehörige Regressionsgerade ohne Technologie zu berechnen.

Lösung der Normalgleichungen:

Sie erhalten b, indem Sie die zweite Gleichung durch n dividieren und nach b umstellen:

b =1/n \*'Si(y\_i) -a \*1/n \*'Si(x\_i)

Dies kann auch mithilfe der arithmetischen Mittelwerte geschrieben werden:

b =y^- -a \*x^-

Sie erhalten a, indem Sie b in der ersten Gleichung einsetzen und diese nach a umstellen.

##### Steigung a und Achsenabschnitt b der Regressionsgeraden y =a \*x +b

||a =('Si(x\_i y\_i) -1/n \*'Si(x\_i) \*'Si(y\_i))// ('Si(x\_1^2) -1/n \*('Si(x\_i)^2))

b =y^- -a \*x^-\||

---

+++Beispiel 4.8: |B|

Regressionsgerade (Fortsetzung von Beispiel 4.6)

Berechnen Sie für die gegebenen Daten der fünf Schülerinnen die zugehörige Regressionsgerade.

Eine Regressionsgerade wird auch als Trendlinie oder Ausgleichsgerade bezeichnet.

---

Lösung:

Zur Berechnung der Steigung a und des y-Achsenabschnitts b erstellen Sie eine geeignete Tabelle.

{{Tabelle aufgelöst}}

Name: Antonia

x\_i: 165

y\_i: 56,3

x\_i^2: 27225

y\_i^2: 3169,69

x\_i \*y\_i: 9289,5

---

Name: Berta

x\_i: 178

y\_i: 71,5

x\_i^2: 31684

y\_i^2: 5112,25

x\_i \*y\_i: 12727

---

Name: Claudia

x\_i: 171,5

y\_i: 70,3

x\_i^2: 29412,25

y\_i^2: 4942,09

x\_i \*y\_i: 12056,45

---

Name: Dorothea

x\_i: 160,3

y\_i: 63,4

x\_i^2: 25696,09

y\_i^2: 4019,56

x\_i \*y\_i: 10163,02

---

Name: Erika

x\_i: 175

y\_i: 67,3

x\_i^2: 30625

y\_i^2: 4529,29

x\_i \*y\_i: 11777,5

---

Name: Summe

x\_i: 849,8

y\_i: 328,8

x\_i^2: 144642,34

y\_i^2: 21772,88

x\_i \*y\_i: 56013,47

---

a =(56013,47 -1/5 \*849,8 \*328,8)/(144642,34 -1/5 \*849,8^2) =0,621

x^- =1/5 \*849,8 =169,96

y^- =1/5 \*328,8 =65,78

b =65,76 -0,621 \*169,96 =-39,785

Die Gleichung der Regressionsgeraden lautet somit: y =0,621x -39,785

j-124

Eine Regressionsgerade gibt keine Auskunft darüber, wie stark der lineare Zusammenhang der Merkmale x und y ist.

-) Liegen die Datenpunkte (x\_i|y\_i) "sehr nahe" an der Regressionsgeraden, dann spricht man von einem starken linearen Zusammenhang.

-) Streuen dagegen die Datenpunkte stark um die Regressionsgerade, dann ist der lineare Zusammenhang schwach.

##### Definition: Korrelation

||-) Unter Korrelation versteht man die Stärke des linearen Zusammenhanges zwischen Variablen.

-) Erfüllen alle (Mess-)Werte die Gleichung der Regressionslinie, dann sind die zugehörigen Variablen vollkommen korreliert.\||

---

{{Grafik: nicht übertragen}}

starke positive Korrelation: r =0,95

{{Grafik: nicht übertragen}}

schwache positive Korrelation: r =0,5

{{Grafik: nicht übertragen}}

keine Korrelation: r =0

{{Grafik: nicht übertragen}}

schwache negative Korrelation: r= -0,5

{{Grafik: nicht übertragen}}

starke negative Korrelation: r=-0,95

---

+++Beispiel 4.9: |C|

Korrelation

a.)

Liegen bei einem Messprozess alle Messwerte auf einer Geraden, so sind die beiden Größen vollkommen korreliert.

-) Das könnte bei einer wiederholten Messung von Spannung U und Stromstärke I (an einem ohmschen Widerstand R) der Fall sein, denn U =I \*R.

-) Gleiches gilt für das Ermitteln des Umfangs U von kreisförmigen Gläsern und deren Durchmesser d, denn U =d \*'pi.

---

b.)

Werden zwei gewöhnliche Spielwürfel geworfen, so besteht kein Zusammenhang zwischen der Augenzahl x des einen und der Augenzahl y des anderen.

x und y sind unkorreliert.

---

c.)

Zwischen Körpergröße x und Körpermasse y besteht im Allgemeinen ein gewisser Zusammenhang.

x und y sind schwach korreliert.

---

d.)

Zwischen Körpergröße x und Schuhgröße y besteht ein starker Zusammenhang. x und y sind stark korreliert.

-----

Diese qualitativen Aussagen können mithilfe einer Maßzahl um quantitative ergänzt werden.

##### Definition: Pearsonscher Korrelationskoeffizient

||Gegeben sind n Datenpunkte (x\_i|y\_i):

Varianz des Merkmals x

s\_x^2 =1/n \*'Si[i =1; n]((x\_i -x^-)^2)

Varianz des Merkmals y

s\_y^2 =1/n \*'Si[i =1; n]((y\_i -y^-)^2)

Kovarianz der Merkmale x und y

s\_(xy) =1/n \*'Si[i =1; n]((x-i -x^-)\*(y\_i -y^-))

Korrelationskoeffizient (Pearson):

Die Kovarianz wird durch das Produkt der Standardabweichungen s\_y und s\_y dividiert.

Durch diese Normierung gilt für r: -1 <=r <=1

r =(s\_(xy))/(s\_x \*s\_y)

Bestimmtheitsmaß

r^2\||

---

Der pearsonsche Korrelationskoeffizient r ist ein Maß für die Stärke des linearen Zusammenhanges zweier Merkmale. Er ist daher für nichtlineare Zusammenhänge nicht oder nur bedingt geeignet.

-) r =+1 bedeutet vollkommene positive Korrelation (steigende Regressionsgerade).

-) r =0 bedeutet keine Korrelation.

-) r =-1 bedeutet vollkommene negative Korrelation (fallende Regressionsgerade).

Anhand des Streudiagramms kann man die Stärke der Korrelation und den Verlauf der Regressionskurve vielfach erkennen.

j-125

+++Beispiel 4.10: |B|

Korrelationskoeffizient (Fortsetzung von Beispiel 4.6)

Berechnen Sie für die zweidimensionale Verteilung (Körpermasse -Körpergröße) den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß.

Lösung:

Varianz der Körpermasse:

a\_x^2 =1/n \*'Si((x\_i -x^-)^2) =1/n \*'Si(x\_i^2) -x^-^2 =1/5 \*144642,34 -169,96^2 =42,0664

Varianz der Körpergröße:

a\_y^2 =1/n \*'Si((y\_i -y^-)^2) =1/n \*'Si(y\_i^2) -y^-^2 =1/5 \*21772,88 -65,76^2 =30,1984

Kovarianz:

s\_(xy) =1/n \*'Si((x-i -x^-)\*(y\_i -y^-)) =1/n \*'Si(x\_i^2 \*y\_i^2) -x^- \*y^- =1/5 \*56013,47 -169,96 \*65,76 =26,1244

Korrelation:

r =(s\_(xy))/(s\_x \*s\_y) =(26,1244)/('w(42,0664) \*'w(30,1984)) ~~0,73297

-----

##### Vom Vorteil und Nutzen der Regression

||-) Man erkennt, ob ein Zusammenhang zwischen den untersuchten Größen besteht (das sieht man meist aber auch schon aus dem Streudiagramm) und von welcher Art der Zusammenhang ist (Auswahl unter den verschiedenen Regressionsmodellen, also Funktionstypen).

-) Man kann die Stärke des Zusammenhangs über den Korrelationskoeffizienten r oder das Bestimmtheitsmaß angeben.

-) Man kann im untersuchten Bereich Funktionswerte für die gewonnene Funktion berechnen. Dabei kann man auch aus dem untersuchten Bereich "hinausschauen". Dass die dabei gewonnenen Einsichten besonders "vorsichtig" behandelt werden müssen, versteht sich von selbst.\||

---

Die Regressionsrechnung wird heute fast ausschließlich mithilfe von Technologie durchgeführt.

+++Beispiel 4.11: |B|

Regressionsgerade mit dem GTR

Grafikfähige Taschenrechner beherrschen eine Vielzahl von Regressionsverfahren. In diesem Beispiel wird eine lineare Regression durchgeführt.

Bevor Sie mit einer Regressionsrechnung beginnen, ist es notwendig, den Diagnosemodus (einmalig) zu aktivieren.

Drücken Sie dazu 2nd [CATALOG], setzen Sie mithilfe der Cursortasten die Markierung vor DiagnosticOn und drücken Sie ENTER.

Die Ausführung des Befehls wird mit "Done" bestätigt.

Stellen Sie bei allen Regressionsrechnungen die Zahlenanzeige auf Float.

Rufen Sie mit STAT 1:Edit den Listeneditor auf und löschen Sie alle nicht benötigten Datenreihen in den Listen.

Setzen Sie dazu den Cursor in den Spaltenkopf der Liste.

Drücken Sie CLEAR ENTER .

Geben Sie die x-Werte in Liste L1 und die y-Werte in Liste L2 ein.

Wenn Sie in der Grafik auch die gegebenen Punkte aus der Liste dargestellt haben wollen, drücken Sie 2nd [STATPLOT]; 1:Plot1 und aktivieren Sie die Werte, wie aus dem Bild in der Randspalte ersichtlich ist.

{{Grafik: nicht übertragen}}

j-126

+++Beispiel 4.11: |B|

Regressionsgerade mit dem GTR (Fortsetzung)

Drücken Sie STAT und wählen Sie CALC.

Aus der Liste der Regressionstypen wählen Sie die lineare Regression 4:LinReg(ax+b) ("4" eingeben).

Der Rechner wechselt zum Normalbildschirm mit der Anzeige LinReg(ax+b).

Geben Sie noch die Liste mit den x-Werten (L1), die Liste mit den y-Werten (L2) und die Bezeichnung der Funktion ein, in der der Term gespeichert werden soll:

Drücken Sie 2nd [L1], 2nd [L2].

Rufen Sie VARS ; Y-VARS; 1: Function ENTER ; 1: Y1 ENTER auf.

Auf dem Bildschirm erscheint LinReg(ax+b) L1, L2, Y1. Drücken Sie ENTER .

{{Grafik: nicht übertragen}}

Nach einer passenden Fenstereinstellung kommen Sie mit GRAPH zur grafischen Darstellung.

-----

+++Beispiel 4.12: |B|

Regressionsfunktion mit GeoGebra

GeoGebra stellt zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Die Regressionsfunktion kann

-) in einem eigenen Datenanalyse-Fenster oder

-) im Algebrafenster erstellt werden.

Bestimmung im Datenanalyse-Fenster Geben Sie die fünf Wertepaare in ein Tabellenblatt ein.

Markieren Sie die Datenreihen und öffnen Sie durch einen Klick auf die Schaltfläche "Analyse zweier Variablen" das Datenquelle-Fenster.

Hier wählen Sie Analyse.

Wählen Sie das Regressionsmodell "Linear" aus dem Kombinationslistenfeld.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Klicken Sie auf die Schaltfläche Statistik anzeigen {{Grafik: nicht übertragen}}, um den Korrelationskoeffizienten neben anderen Kennzahlen anzuzeigen.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Der Korrelationskoeffizient r ist 0,733.

Sie können im Datenanalysefenster auch Funktionswertberechnungen durchführen. Hier wurde die Körpermasse für eine 169 cm große Schülerin, die zu den fünf Schülerinnen "passt", mit etwa 65,2 kg berechnet.

{{Grafik: nicht übertragen}}

{{Grafik: nicht übertragen}}

Ansicht / Tabelle führt zum Tabellenblatt

{{Grafik: nicht übertragen}}

Die markierten Daten können analysiert werden.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Die markierten Daten werden im Datenquelle-Fenster nochmals aufgelistet.

Bestimmung im Algebrafenster

Geben Sie die fünf Wertepaare - beispielsweise wie in der Randspalte abgebildet - in ein Tabellenblatt ein.

Markieren Sie die Datenreihen und öffnen Sie durch einen Klick mit der rechten Maustaste auf die markierten Daten das zugehörige Kontextmenü. Rufen Sie den Befehl Erzeuge / Liste von Punkten auf.

Geben Sie im Algebrafenster die Funktion f(x) =TRENDPOLY[Liste1, 1] ein.

{{Grafik: nicht übertragen}}

j-127

+++Beispiel 4.13: |B, C, D|

Regressionsfunktionen - Kostenfunktion

In der Kostenstelle eines Unternehmens wird die Abhängigkeit der Gesamtkosten von der Produktionsmenge erhoben.

Die Ergebnisse der Erhebung sind in der Tabelle dokumentiert. x Produktionsmenge in ME

K(x) Gesamtkosten in GE für x ME

{{Tabelle aufgelöst}}

Produktionsmenge x in ME: 2

Gesamtkosten K(x) in GE: 14

---

Produktionsmenge x in ME: 3

Gesamtkosten K(x) in GE: 18

---

Produktionsmenge x in ME: 5

Gesamtkosten K(x) in GE: 32

---

Produktionsmenge x in ME: 6

Gesamtkosten K(x) in GE: 41

---

Produktionsmenge x in ME: 8

Gesamtkosten K(x) in GE: 64

---

Erstellen Sie

a.)

die lineare,

b.)

die quadratische,

c.)

die kubische,

d.)

die exponentielle Regressionsfunktion.

e.)

Erklären Sie, welche der vier Funktionen sich zur Beschreibung der Gesamtkosten am besten eignet.

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

{{Lösung auf Seite 127 und 128}}

Lösung:

Rufen Sie mit STAT 1:Edit den Listeneditor auf und geben Sie die x-Werte in der Liste L1 und die zugehörigen Gesamtkosten K(x) in Liste L\_2 ein.

Um die Werte im Koordinatensystem darzustellen, aktivieren Sie mit 2nd [STAT PLOT]; 1:Plot1 das Streudiagramm.

a.)

Lineare Regression: y =a \*x +b

Im Menü STAT und Untermenü [CALC] wählen Sie aus der Liste der Regressionstypen die lineare Regression 4:LinReg(ax+b) aus.

Geben Sie die Liste mit den x-Werten (L\_1), die Liste mit den Kostenwerten (L\_2) und die Bezeichnung der Funktion (Y\_1) ein, in der die Regressionsgleichung gespeichert werden soll (Y\_1 erhalten Sie über das Menü VARS; [Y-VARS]; 1:Function ENTER 1: Y1 ENTER ).

Bestätigen Sie die Eingabe LinReg(ax+b) L\_1,L\_2,Y\_1 mit ENTER.

Sie erhalten die Parameter der Regressionsgeraden:

Steigung:

a ~~8,28 GE/ME

Pro weiterer ME steigen die Kosten um 8,28 GE.

Achenabschnitt:

b ~~-5,95 GE

Bestimmtheitsmaß:

r^2 ~~0,972

Korrelationskoeffizienn:

r =0,986; nahe bei +1 starker positiver linearer Zusammenhang

Lineare Kostenfunktion:

K(x) =8,28 \*x -5,95

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

j-128

b.)

Quadratische Regression: y =a \*x^2 +b \*x +c

Wählen Sie im Menü STAT und Untermenü [CALC] den Regressionstyp 5:QuadReg und geben wieder die Listen L1, L2 und die Funktion Y1 ein: QuadReg L\_1,L\_2,Y\_1.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Sie erhalten die Parameter der quadratischen Regressionsfunktion

y =a \*x^2 +b \*x +c:

a ~~0,788,

b ~~0,485 und

c ~~9,727.

Bestimmtheitsmaß:

r^2 ~~0,9999, nahe bei +1 gute Anpassung der Funktion an die Daten

Beachten Sie: Der Korrelationskoeffizient kann nur für lineare (oder linearisierbare) Regressionsfunktionen ermittelt werden.

Quadratische Kostenfunktion:

K(x) =0,788 \*x^2 +0,485 \*x +9,727

---

c.)

Kubische Regression: y =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d

Wählen Sie im Menü STAT und Untermenü [CALC] den Regressionstyp 6:CubicReg und geben wieder die Listen L1, L2 und die Funktion Y1 ein: CubicReg L\_1,L\_2,Y\_1.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Kubische Kostenfunktion:

K(x) =-0,022 \*x^3 +1,123 \*x^2 -1,048 \*x +11,737

Bestimmtheitsmaß: r^2 ~~0,99996

Die kubische Funktion passt beinahe perfekt zu den Daten.

---

d.)

Exponentielle Regression: y =a \*b^x

Wählen Sie im Menü STAT und Untermenü [CALC] den Regressionstyp 0:ExpReg und geben wieder die Listen L1, L2 und die Funktion Y1 ein: ExpReg L\_1, L\_2, Y\_1

{{Grafik: nicht übertragen}}

Exponentielle Kostenfunktion: K(x) =8,4877 \*1,2934^x

Korrelationskoeffizient: r ~~0,9985

Bestimmtheitsmaß: r^2 ~~0,9969

Die exponentielle Funktion passt fast perfekt zu den Daten.

---

e.)

Vergleich der Regressionskurven

Das Bestimmtheitsmaß nähert sich von a) bis c) immer mehr an den Wert +1 an. Beim Vergleich der Bestimmtheitsmaße der vier Regressionsfunktionen ist allerdings Vorsicht geboten, da das Bestimmtheitsmaß mit der Anzahl der geschätzten Parameter zunimmt.

Zudem ist die kubische Kostenfunktion nicht ertragsgesetzlich.

-----

j-129

##### Übungsaufgaben

+++4.018 |A, B, C|

Eine Unternehmerin untersucht die Gesamtkosten K (in 1000,00 €) für verschiedene Produktionsmengen x in Stück:

{{Tabelle aufgelöst}}

x: 10

K: 75

---

x: 20

K: 85

---

x: 30

K: 90

---

x: 40

K: 105

---

x: 50

K: 110

---

a.)

Zeichnen Sie das zugehörige Streudiagramm.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie jene lineare Kostenfunktion in das Diagramm ein, die diese Kostenwerte aus Ihrer Sicht am besten beschreibt.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie die Parameter Ihrer Geraden aus der Zeichnung ab.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Regressionsgerade.

**[]**

---

e.)

Interpretieren Sie die Parameter der berechneten Kostenfunktion.

**[]**

---

f.)

Geben Sie mithilfe der Regressionsgerade eine Prognose für die Kosten bei einer Produktion von 45 Stück.

**[]**

-----

+++4.019 |A, B, C, D|

Der Kosteneinsatz für die Werbung für ein Produkt (Werbungskosten X in 1000,00 €) und dem Jahresumsatz U für dieses Produkt (in Mio. €) wurde über einige Jahre beobachtet:

{{Tabelle aufgelöst}}

Jahr: 1

X: 30

U: 6

---

Jahr: 2

X: 35

U: 6

---

Jahr: 3

X: 35

U: 8

---

Jahr: 4

X: 40

U: 9

---

Jahr: 5

X: 50

U: 12

---

Jahr: 6

X: 50

U: 13

---

Jahr: 7

X: 55

U: 14

---

Jahr: 8

X: 60

U: 14

---

a.)

Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten.

**[]**

---

c.)

Zeichnen Sie ein Streudiagramm mit der Regressionsgeraden.

**[]**

---

d.)

Geben Sie mithilfe der Regressionsgeraden eine Prognose für den Jahresumsatz bei einem Werbeaufwand von 45000,00 €.

**[]**

---

e.)

Erklären Sie, ob das lineare Modell geeignet ist, um den Zusammenhang zwischen Werbungskosten pro Jahr und Umsatz pro Jahr zu beschreiben.

**[]**

-----

+++4.020 |A, B, C|

In einem Zufallsexperiment werden 300 Münzen geworfen. Jene Münzen, die "Zahl" zeigen, werden entfernt. Die restlichen werden wieder geworfen usw. Das Versuchsergebnis lautet:

{{Tabelle aufgelöst}}

Wurfnummer: 0

Anzahl: 300

---

Wurfnummer: 1

Anzahl: 156

---

Wurfnummer: 2

Anzahl: 82

---

Wurfnummer: 3

Anzahl: 48

---

Wurfnummer: 4

Anzahl: 28

---

Wurfnummer: 5

Anzahl: 18

---

Wurfnummer: 6

Anzahl: 8

---

Wurfnummer: 7

Anzahl: 6

---

Wurfnummer: 8

Anzahl: 3

---

a.)

Untersuchen Sie mit verschiedenen Regressionsmodellen (linear, quadratisch, exponentiell) den funktionalen Zusammenhang.

**[]**

---

b.)

Begründen Sie, welches Regressionsmodell die Daten am besten beschreibt.

**[]**

---

c.)

Führen Sie selber eine Versuchsserie mit 100 Münzen durch.

Werten Sie Ihre Versuchsserie ebenfalls wie in a) aus.

**[]**

-----

+++4.021 |A, B|

{{Grafik: nicht übertragen}}

Fibonacci-Folge:

Im Jahr 1202 stellte der italienische Mathematiker Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in seinem Buch "liber abaci" folgende Aufgabe:

Ein frisch geborenes Hasenpaar (Männlein und Weiblein) wird in einem Feld ausgesetzt. Nach einem Monat sind die Hasen geschlechtsreif, nach jedem weiteren Monat wird ein Hasenpaar geboren. Wir nehmen an, dass kein Hase stirbt.

a.)

Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Anzahl der Hasenpaare nach 0, 1, 2, ..., 12 Monaten.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie, wie viele Hasenpaare es nach einem Jahr und einem Monat gibt.

**[]**

---

c.)

Modellieren Sie Ihre Datenpaare durch eine exponentielle Regressionsfunktion. Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion.

**[]**

-----

j-130

+++4.022 |A, B, D|

Der stündliche Treibstoffverbrauch eines Schiffes sei näherungsweise durch die Funktion T mit T(v) =a \*v^3 +b \*v^2 +c \*v +d gegeben.

v Geschwindigkeit des Schiffes in km/h

T(v) Verbrauch in Tonnen pro Stunde bei der Geschwindigkeit v

a.)

Erstellen Sie die Funktion T aus der nachstehenden Tabelle.

**[]**

{{Tabelle aufgelöst}}

Geschwindigkeit v in km/h: 0

Verbrauch T(v) in t/h: 1,5

---

Geschwindigkeit v in km/h: 10

Verbrauch T(v) in t/h: 2,5

---

Geschwindigkeit v in km/h: 20

Verbrauch T(v) in t/h: 9,5

---

Geschwindigkeit v in km/h: 30

Verbrauch T(v) in t/h: 28,5

---

b.)

Erklären Sie, warum das Bestimmtheitsmaß dieser Regressionsfunktion gleich 1 ist.

**[]**

---

##### Ziele erreicht?

+++Z 4.1 |A, B, C, D|

Auf einem Bauernhof soll eine rechteckige Weide mit einem Flächeninhalt von 60 m^2 umzäunt werden. Eine Seite der Weide wird durch die Stallmauer begrenzt. Die Kosten für einen Laufmeter Zaun betragen € 7,00. Die Kosten für die Umzäunung der Weide sollen minimal sein.

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion in Abhängigkeit der an den Stall grenzenden Seitenlänge.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie den Graphen der Kostenfunktion für einen sinnvollen Definitionsbereich dar.

Lesen Sie aus der Grafik die Länge der durch die Stallmauer begrenzten Weidenseite ab.

**[]**

---

c.)

Kontrollieren Sie den in b) abgelesenen Wert durch Berechnung.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Länge der anderen Zaunseite und die für den Zaun anfallenden Kosten.

**[]**

-----

+++Z 4.2 |A, B, C, D|

Ein Betrieb kennt für eines seiner Produkte folgende anfallende Produktionskosten K in Abhängigkeit der Produktionsmenge x.

{{Tabelle aufgelöst}}

x in E: 10

K(x) in GE: 350

---

x in E: 20

K(x) in GE: 470

---

x in E: 30

K(x) in GE: 680

---

x in E: 40

K(x) in GE: 805

---

a.)

Stellen Sie die gegebenen Daten in einem Streudiagramm dar.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie händisch eine passende Regressionsgerade in Ihr Streudiagramm ein.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, worauf Sie beim Zeichnen achten.

**[]**

---

d.)

Lesen Sie die Gleichung Ihrer Geraden ab.

**[]**

e.)

Interpretieren Sie die Koeffizienten der Gerade im Sachzusammenhang.

**[]**

---

f.)

Berechnen Sie mithilfe von Technologie eine passende Regressionsgerade.

**[]**

---

g.)

Beurteilen Sie den pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

**[]**

---

h.)

Erklären Sie, warum das Bestimmtheitsmaß einer Regressionsfunktion dritten Grades im gegebenen Beispiel gleich 1 ist.

**[]**

-----

+++Z 4.3 |B, C, D|

Eine Firma hat folgende Erfahrungen in Hinsicht des Zusammenhangs von erwirtschaftetem Umsatz und Investitionen in den Werbeaufwand gesammelt:

{{Tabelle aufgelöst}}

Werbeaufwand x in GE: 45

Umsatz U(x) in GE: 80

---

Werbeaufwand x in GE: 60

Umsatz U(x) in GE: 102

---

Werbeaufwand x in GE: 65

Umsatz U(x) in GE: 107

---

Werbeaufwand x in GE: 75

Umsatz U(x) in GE: 119

---

Werbeaufwand x in GE: 80

Umsatz U(x) in GE: 120

---

Werbeaufwand x in GE: 112

Umsatz U(x) in GE: 130

---

a.)

Ermitteln Sie eine quadratische Regressionsfunktion, die diesen Zusammenhang beschreibt.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß dieser Funktion.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie mithilfe der Regressionsfunktion den für einen Werbeaufwand von 300 GE zu erwartenden Umsatz.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, warum der in c) berechnete Wert nicht aussagekräftig ist.

**[]**

---

j-131

# !!5 Kosten- und Preistheorie

Die mathematisch fundierte Betriebswirtschaftslehre und insbesondere die Kostentheorie sind als selbstständige wissenschaftliche Disziplin erst im 20. Jahrhundert entstanden.

Aufzeichnungen über Bestände und Wertungen, Buchhaltung, Rechnen und kaufmännischer Schriftverkehr lassen sich schon bei den Ägyptern, Griechen und Römern nachweisen. Aber bis in die Neuzeit gab es keine wissenschaftliche Bewältigung wirtschaftlicher Probleme.

In der Zeit der Renaissance wurde das Aufzeichnen von Lebenserfahrungen und der Grundsätze praktischer Wirtschaftsführung eines Kaufmannes zum Nutzen der Kaufmannsfamilien und Firmen erforderlich. Das älteste gedruckte handelstechnische Werk ist enthalten in dem 1494 erschienenen Lehrbuch der Mathematik von Luca Pacioli (1445 bis 1514), einem Franziskanermönch und Mathematikprofessor.

Bedeutung erlangte dann das Werk von Jacques Savary (1622 bis 1690), der sich mit der Frage beschäftigte: "Wie kann auf eine redliche Weise dauernd der größte Gewinn erzielt werden?"

Im 19. Jahrhundert erfolgte eine zunehmende Mathematisierung der ökonomischen Theorie. Der französische Ökonom und Mathematiker Antoine-Augustin Cournot (1801 bis 1877) untersuchte den Gewinn eines Monopolunternehmens. Der französische Ökonom Leon Walras (1834 bis 1910) und der englische Ökonom Alfred Marshall (1842 bis 1924) entwickelten die Marginalanalyse, die mit den Mitteln der Differenzialrechnung ökonomische Größen bei kleinen Änderungen der sie verursachenden Größen untersucht. Die Ableitung der ökonomischen Funktionen bezeichneten sie als Grenzfunktionen.

Einen großen Aufschwung nahm die Anwendung mathematischer und statistischer Methoden nach dem Zweiten Weltkrieg. 1951 erschien in Deutschland das einflussreiche Werk "Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre" von Erich Gutenberg (1897 bis 1984), in dem mithilfe der Mathematik die Betriebswirtschaftlehre als exakte Theorie dargestellt wird.

In der Ökonometrie wurden die statistischen Methoden, die in der Zwischenkriegszeit entwickelt wurden, auf ökonomische Problemstellungen angewandt. Herzstück der Ökonometrie ist die Regressionsanalyse, die mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate optimale Schätzungen ökonomischer Größen ermöglicht.

Die Mathematik hat sich als die formale Sprache der ökonomischen Theorie etabliert, ohne die Methoden der Differenzialrechnung und der Statistik sind ökonomische Analysen in der heutigen Zeit undenkbar.

---

Aufgabe der Wirtschaftsmathematik ist es, wichtige Gesetzmäßigkeiten und Regeln im Ablauf einer Marktwirtschaft zu untersuchen.

Es werden dazu folgende Bezeichnungen verwendet:

-) ME für Mengeneinheit wie Stückzahl, 1 t, 100 kg, 1 Dutzend, 10 Ballen ...

-) GE für Geldeinheit wie € 10,00, CHF 200,00, $ 1,00 ...

-) ZE für Zeiteinheit wie 1 Woche, 1 Monat ...

Die Definitionsmengen der auftretenden Funktionen sind Teilmengen von 'R\_0^+, da im Allgemeinen für ME und ZE keine negativen Werte auftreten.

Das Wort "Menge" als Maß für eine Ware ist nicht im Sinne der Mengenlehre zu verstehen.

Der Preis p einer Ware ist der Wert je Mengeneinheit.

Die Einheit eines Preises p ist daher GE/ME.

j-132

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) Nachfrage- und Angebotsfunktionen bestimmen, deren Eigenschaften erklären und markante Werte (Mindestpreis, Höchstpreis, Sättigungsmenge, Marktgleichgewicht) ermitteln, grafisch darstellen und interpretieren,

-) die Begriffe der (Punkt-)Elastizität und Bogenelastizität im wirtschaftlichen Kontext erklären,

-) Elastizitäten berechnen und die Ergebnisse interpretieren,

-) den Begriff und die Eigenschaften der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben und diese als Polynomfunktion dritten Grades berechnen,

-) die typischen Kostenverläufe (degressiv, progressiv) beschreiben und interpretieren,

-) typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkehre, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break-even-Point, Gewinnzone, cournotscher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren,

-) den Begriff der Grenzfunktion beschreiben, diese im wirtschaftlichen Kontext erklären und anwenden.\||

---

##### Worum geht's hier?

##### Marktpreis

Jungunternehmer Nora und Gerd Tortellini planen einen Pizzaimbiss in einem Einkaufszentrum. Ausgehend von geschätzten Kosten wurde eine Angebotsfunktion erstellt. Zur Vereinfachung beziehen sich alle Angaben auf eine Pizzasorte.

-) Bei einem Preis von € 6,40 würden sie 2000 Pizzas pro Woche herstellen.

-) Bei einem Preis von € 7,80 wäre die angebotene Anzahl 4000 Pizzas pro Woche.

-) Bei € 9,20 würden sie 6000 Pizzas und

-) bei einem Preis von € 10,60 sogar 8000 Pizzas herstellen und anbieten.

Durch Marktforschung wurde auch die Nachfrage nach Pizzas bei verschiedenen Preisen festgestellt. Preise und nachgefragte Mengen finden Sie in der Randspalte.

{{Tabelle aufgelöst}}

Preis p in €/Stück:

Angebot x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Angebot x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Angebot x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Angebot x in Stück:

---

{{Tabelle aufgelöst}}

Preis p in €/Stück:

Nachfrage x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Nachfrage x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Nachfrage x in Stück:

---

Preis p in €/Stück:

Nachfrage x in Stück:

---

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

Angebotene und nachgefragte Menge als Funktion des Preises.

Angebots- und Nachfragepreis in Abhängigkeit von der Menge.

---

Wie viele Pizzas sollten Nora und Gerd pro Woche herstellen und welchen Verkaufspreis sollten sie festlegen?

Lösung:

Mithilfe der Regressionsrechnung (in diesem Fall lineare Regression) erhält man aus den gegebenen Daten eine Funktion, die die angebotene Anzahl von Pizzas in Abhängigkeit vom Preis angibt. Auf gleiche Art und Weise wird auch eine lineare Funktion für die Nachfrage berechnet.

Der Schnittpunkt der beiden Funktionen gibt den Preis (€ 8,50 pro Pizza) an, bei dem die Anzahl der angebotenen Pizzas genau so groß ist, wie die Zahl der tatsächlich verkauften Pizzas (5000 Stück).

Nora und Gerd Tortellini sollten € 8,50 für eine Pizza verlangen. Sie könnten dann 5000 Pizzas pro Woche verkaufen.

j-133

## !!5.1 Angebot, Nachfrage und Marktpreis

### !!5.1.1 Angebot

Die von einem Produzenten angebotene Menge x eines Produktes ist vom Preis p des Produktes auf dem Markt abhängig.

Je höher der Preis p ist, umso größer ist im Allgemeinen die angebotene Menge.

Der höhere Preis ist der Anreiz für den Produzenten, von einem Produkt eine größere Menge zu erzeugen.

Dadurch wird eine Angebotsfunktion x\_A: p -> x\_A(p) definiert.

Es ist üblich, den Preis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x darzustellen: x -> p\_A(x)

Diese Umkehrfunktion der Angebotsfunktion heißt Preisfunktion des Angebots p\_A. Dies hat den Vorteil, dass zusätzliche Funktionen wie Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktionen, deren unabhängige Variable die Menge x ist, in einem Diagramm dargestellt und interpretiert werden können.

|T|:

Angebotsfunktion x\_A: angebotene Menge in Abhängigkeit vom Preis: p -> x\_A(p)

Preisfunktion des Angebots p\_A: Angebotspreis in Abhängigkeit von der Menge: x -> p\_A(x)

Die Preisfunktion des Angebots ist die Umkehrfunktion der Angebotsfunktion.

{{Grafik: Angebotsfunktion nicht übertragen}}

Preisfunktion des Angebots

p\_A: x -> p\_A(x)

angebotene Menge in ME je ZE

x

Preis in GE je ME zur angebotenen Menge x

p\_A(x)

p\_A(0) ist der Preis, bei dem die Produzenten gerade noch nicht bereit sind, das Produkt anzubieten.

Die Preisfunktion des Angebots ist im Allgemeinen (monoton) wachsend:

p\_A'(x) >=0

+++Beispiel 5.1: |A, B, D|

Preisfunktion des Angebots erstellen

Von einer Preisfunktion des Angebots kennt man folgende Werte:

Bei einem Preis von 3 GE/ME wird das Produkt gerade noch nicht angeboten.

Bei einem Preis von 8 GE/ME wird 1 ME angeboten.

Bei einem Preis von 24 GE/ME werden 3 ME angeboten.

a.)

Erklären Sie, warum eine Preisfunktion, die diese Bedingungen erfüllt, nicht linear sein kann.

---

b.)

Erstellen Sie eine Preisfunktion des Angebots, die diese Bedingungen erfüllt.

{{Grafik: Preisfunktion nicht übertragen}}

---

Lösung:

a.)

Für das Mengenintervall [0; 1] beträgt die mittlere Preisänderungsrate

('De p)/('De x) =(8 -3)/(1 -0) =5

Für das Mengenintervall [1; 3] beträgt die mittlere Preisänderungsrate

('De p)/('De x) =(24 -8)/(3 -1) =8

Da diese Preisänderungsraten nicht gleich sind, kann die Preisfunktion nicht linear sein.

---

b.)

Die Preisfunktion, die drei Bedingungen erfüllen muss, kann durch eine quadratische Funktion mit den drei Parametern a, b und c modelliert werden.

p\_A(x) =a \*x^2 +b \*x +c

p\_A(0) =3:

3 =a \*0^2 +b \*0 +c

p\_A(1) =8:

8 =a \*1^2 +b \*1 +3

p\_A(3) =24:

24 =a \*3^2 +b \*3 +3

<--> c =3

5 =a +b | \*(-3)

21 =9 \*a +3 \*b

{{Addition der beiden Gleichungen}}

6 =6 \*a

a =1; b =4

p\_A(x) =x^2 +4 \*x +3

---

|V|: Die quadratische Preisfunktion des Angebots kann auch mithilfe einer quadratischen Regression ermittelt werden.

-----

j-134

+++Beispiel 5.2: |B|

Preisfunktion des Angebots (Fortsetzung von Beispiel 5.1)

Gegeben ist die Preisfunktion des Angebots p\_A mit p\_A(x) =x^2 +4 \*x +3, 1 ME =1000 Stück.

a.)

Ermitteln Sie den Preis p\_A, bei dem 2700 Stück angeboten werden.

---

b.)

Ermitteln Sie jene Menge, die bei einem Preis von 15 GE/ME angeboten wird.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lösung:

a.)

x =2700 Stück =2,7 ME

p\_A(2,7) =?

p\_A(2,7) =2,7^2 +4 \*2,7 +3 =21,09

Damit 2700 Stück angeboten werden, muss der Preis 21,09 GE/ME betragen.

---

b.)

p\_A(x) =15,

x =?

x^2 +4 \*x +3 =15 quadratische Gleichung

x =2 (Die zweite Lösung ist negativ.)

Bei einem Preis von 15 GE/ME werden 2000 Stück angeboten.

{{Grafik: Lösung mit Technologie}}

-----

### !!5.1.2 Nachfrage

Die nachgefragte Menge (Absatzmenge) x eines Produkts hängt vom Verkaufspreis p\_N ab. Je niedriger der Preis p\_N ist, desto größer ist im Allgemeinen die nachgefragte Menge des Produktes.

Der niedrige Preis ist der Anreiz für den Konsumenten, von einem Produkt eine größere Menge zu kaufen.

Die Zuordnung x\_N: p -> x\_N(p), die dem Preis die nachgefragte Menge zuordnet, heißt Nachfragefunktion.

Die umgekehrte Zuordnung p\_N: x -> pN(x) heißt Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion).

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Preisfunktion der Nachfrage

p\_N: x -> p\_N(x)

nachgefragte Menge in ME je ZE, 0 <=x <=x\_s

x

Preis in GE je ME zur nachgefragten Menge x

p\_N(x)

Der Höchstpreis p\_h ist jener Preis, ab dem das Produkt nicht mehr nachgefragt wird.

p\_h

Berechnung: Den Preis p\_h =p\_N(0) berechnen.

Höchstpreis p\_h: p\_h =p\_N(0)

Die Sättigungsmenge x\_s ist jene Menge, bei der der Markt voll gesättigt ist und keine weitere Nachfrage nach dem Produkt besteht.

x\_s

Berechnung: p\_N(x) =0 setzen und die Menge x\_s berechnen.

Sättigungsmenge x\_s: p\_N(x\_s) =0

Die Preisfunktion der Nachfrage ist im Allgemeinen (monoton) fallend:

p\_N'(x) <=0

---

+++Beispiel 5.3: |A, B|

Preisfunktion der Nachfrage erstellen

Von einer Preisfunktion der Nachfrage kennt man folgende Werte:

Der Höchstpreis beträgt 6 GE/ME. Die Sättigungsmenge liegt bei 4 ME. Erstellen Sie die lineare Preisfunktion der Nachfrage.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

Lösung:

p\_N(x) =a \*x +b

p\_N(0) =6: 6 =a \*0 +b <--> b =6

p\_N(4) =0: 0 =a \*4 +6 <--> a =-1,5

Preisfunktion der Nachfrage:

p\_N(x) =-1,5 \*x +6

-----

j-135

+++Beispiel 5.4: |B|

Preisfunktion der Nachfrage

Gegeben ist die Preisfunktion der Nachfrage p\_N mit

p\_N(x) =-1,9 \*x^2 -27 \*x +3 500.

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion.

---

b.)

Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Höchstpreis:

x =0 ME

p\_h =p\_N(0) =3500 GE/ME

Sättigungsmenge:

quadratische Gleichung

0 =-1,9 \*x^2 -27 \*x +3500

x\_s ~~36,4 ME (Die zweite Lösung ist negativ.)

{{Grafik: Lösung mit Technologie}}

-----

##### Besonderheiten und Ausnahmen bei der Nachfragefunktion

||Im Allgemeinen gilt:

Je höher der Preis, umso kleiner ist die Nachfrage.

Je niedriger der Preis, umso größer ist die Nachfrage.

In einigen Ausnahmefällen kann sich dieses Verhalten umkehren:

-) Snob-Effekt: Der Snob möchte sich von der Masse abheben, indem er auffällige Güter kauft, die nicht alltäglich sind. (Es wird mehr gekauft, weil andere weniger kaufen.)

-) Veblen-Effekt: Ein Produkt wird gekauft, weil es einen hohen Preis hat (Imponierverhalten). Der Konsument will durch aufwändigen Konsum auffallen, wobei die Aufwändigkeit am Preis des Produkts gemessen wird. (Es wird mehr gekauft, weil der Preis höher ist.)

-) Mitläufer-Effekt: Meinungsführer sind Vorbild für eine Kaufentscheidung. Trotz steigender Preise wird mehr gekauft, weil andere auch mehr kaufen.

-) Giffen-Paradoxon: Steigt z. B. der Reispreis, können sich Familien mit einem beschränkten Budget keine teureren Nahrungsmittel, z. B. Fleisch, leisten und sind gezwungen, noch mehr Reis zu kaufen. Trotz Erhöhung des Preises eines Produkts steigt die Nachfrage nach diesem Produkt.

-) Preis als Qualitätsmaßstab: Vom hohen Preis eines Produkts wird auf eine entsprechend hohe Qualität geschlossen und umgekehrt. (Es wird gekauft, weil der Preis höher ist.)\||

---

|D|: Können Sie die angeführten Effekte in Ihrer Umgebung beobachten?

Erklären Sie die Ausnahmen bei der Nachfragefunktion anhand von Beispielen.

{{Grafik: US-amerikanischer Ökonom, Thorstein Veblen, 1857 bis 1929}}

### !!5.1.3 Marktpreis

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird als Markt bezeichnet.

Auf dem Markt stellt sich bei freier Entscheidungsmöglichkeit für Angebot und Nachfrage ein gemeinsamer Gleichgewichtspreis, der Marktpreis p\_G ein.

Für diesen sind angebotene und nachgefragte Menge gleich groß.

Der Marktpreis ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Graphen der Preisfunktionen des Angebots und der Nachfrage.

Man ermittelt den Marktpreis durch Berechnung der Menge x\_G, für die p\_A(x\_G) =p\_N(x\_G) gilt.

{{Grafik: Auf einem Markt tauschen Produzenten und Konsumenten Waren.}}

##### Definition: Marktpreis, Gleichgewichtsmenge

||Der Marktpreis p\_G ist jener Preis, bei dem die angebotene Menge gleich der nachgefragten Menge ist.

Diese Menge heißt Gleichgewichtsmenge x\_G.

p\_G =p\_A(x\_G) =p\_N(x\_G)\||

---

|D|: Diskutieren Sie, wovon der Preis einer Ware auf einem Markt abhängt.

j-136

+++Beispiel 5.5: |B|

Marktpreis

Die Preisfunktionen des Angebots p\_A und der Nachfrage p\_N für ein Produkt sind gegeben durch p\_A(x) =x^2 +6 \*x +2 und p\_N(x) =-1,5 \*x +6.

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Gleichgewichtsmenge x\_G und den Marktpreis p\_G.

---

Lösung: p\_A(x) =p\_N(x)

x^2 +6 \*x +2 =-1,5 \*x +6

x^2 +7,5 \*x -4 =0 quadratische Gleichung

x\_1 =0,5 =x\_G (x\_2 =-8 \'el D)

p\_G =p\_A(0,5) =p\_N(0,5) =5,25

---

Zwei Schritte zum Marktpreis p\_G:

1. x\_G aus p\_A(x\_G) =p\_N(x\_G) berechnen

2. x\_G in p\_A oder p\_N einsetzen:

p\_G =p\_A(x\_G) oder p\_G =p\_N(x\_G)

Die quadratische Gleichung x^2 +7,5 \*x -4 =0 kann man auch mit Linearfaktoren anschreiben: (x +8) \*(x -0,5) =0

---

{{Grafik: Lösung mit Technologie}}

---

Die Gleichgewichtsmenge ist 0,5 ME und der zugehörige Marktpreis beträgt 5,25 ME/GE.

-----

### !!5.1.4 Beeinflussung des Marktpreises

Der Marktpreis kann beeinflusst werden durch

-) Änderungen des Angebotes, verursacht durch gute oder schlechte Ernten, Rationalisierung, Veränderung bei der Einfuhr etc.

-) Änderungen der Nachfrage, bewirkt durch Modetrends, Werbung, Terror etc.

-) Steuern (z. B. auf Genussmittel), die den Preis erhöhen und die Nachfrage vermindern. Die freie Preisbildung bleibt jedoch erhalten.

-) Subventionen (Unterstützungen, negative Steuern, z. B. auf Grundnahrungsmittel), die den Preis ermäßigen und die Nachfrage erhöhen. Die freie Preisbildung bleibt jedoch erhalten.

##### Staatlich festgelegter Höchst- und Mindestpreis

Besonders in Krisenzeiten kann der Staat zur Stützung von Verbrauchergruppen und Wirtschaftszweigen Preise festlegen. Der Preis kann nicht mehr durch Angebot und Nachfrage ausgeglichen werden (keine freie Marktwirtschaft).

Ist ein Wirtschaftszweig (z. B. Landwirtschaft) gefährdet, so kann der Staat einen Mindestpreis p\_M festsetzen, zu dem eine Ware angeboten wird (z. B. Mindestpreis für Milch).

Der festgelegte Mindestpreis p\_M liegt immer über dem Marktpreis p\_G.

Da zu einem Preis p\_M <p\_G die Menge x\_(MA) angeboten wird, aber nur eine kleinere Menge x\_(MN) nachgefragt wird, entsteht ein Angebotsüberhang x\_(MA) -x\_(MN), der vom Markt fern gehalten werden muss.

Dies kann durch Einlagerungsaktionen (Butter, Wein, Getreide) oder durch gestützten Export zu Billigpreisen erfolgen. Oft werden überschüssige Produkte aber auch vernichtet, um hohe Preise zu sichern.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

p\_M <p\_G

x\_(MN) beim festgelegten Mindestpreis p\_M nachgefragte Menge

x\_(MA) beim festgelegten Mindestpreis p\_M angebotene Menge

x\_(MA) -x\_(MN) Angebotsüberhang

---

j-137

Angebot, Nachfrage und Marktpreis

Um eine Verbrauchergruppe (z. B. Mieter) zu schützen, kann der Staat einen höchstzulässigen Preis pH festsetzen (z. B. Mietobergrenze).

Der festgelegte Höchstpreis p\_H liegt immer unter dem Gleichgewichtspreis p\_G.

Da zum Preis p\_H <p\_G die Menge x\_(HN) nachgefragt wird, die Anbieter aber nur bereit sind, die Menge x\_(HA) zu produzieren, kommt es zu einem Nachfrageüberhang x\_(HN) -x\_(HA).

In diesem Fall ist z. B. durch Rationierung für eine gerechte Verteilung der betroffenen Güter zu sorgen.

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

p\_H <p\_G

x\_(HA) beim festgelegten Höchstpreis p\_H angebotene Menge

x\_(HN) beim festgelegten Höchstpreis p\_H nachgefragte Menge

x\_(HN) -x\_(HA) Nachfrageüberhang

---

+++Beispiel 5.6: |B, C|

Mindestpreis -Angebotsüberhang

Die Preisfunktionen des Angebots p\_A und der Nachfrage p\_N für ein Produkt sind gegeben durch p\_A(x) =4 \*x +4 und p\_N(x) =-x^2 +36.

a.)

Stellen Sie die Preisfunktionen grafisch dar.

---

b.)

Ermitteln Sie den Marktpreis. Markieren Sie den Marktpreis in der Grafik.

---

c.)

Ermitteln Sie den Mengenüberhang bei einem staatlich festgelegten Preis von 27 GE/ME. Zeichnen Sie diesen in der Grafik ein.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

p\_A(x) =p\_N(x)

4 \*x +4 =-x^2 +36

x^2 +4 \*x -32 =0 quadratische Gleichung

x\_1 =4 =x\_G (x\_2 =-8 \'el D)

p\_G =p\_A(4) =p\_N(4) =20

Die Gleichgewichtsmenge ist 4 ME.

Der zugehörige Marktpreis beträgt 20 GE/ME.

---

c.)

Da der staatlich festgelegte Preis größer als der Marktpreis ist, handelt es sich um einen Mindestpreis, der zu einem Angebotsüberhang führt.

p\_A(x) =27

4 \*x +4 =27

4 \*x =23

x =x\_(MA) =5,75

p\_N(x) =27

-x^2 +36 =27

x^2 =9

x =x\_(MN) =3 (x =-3 \'el D)

Angebotsüberhang: x\_(MA) -x\_(MN) =5,75 -3 =2,75

Der Angebotsüberhang beträgt 2,75 ME.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

### !!5.1.5 Marktformen

Die Preispolitik eines Betriebs hängt wesentlich von der Marktsituation ab, in der sich der Betrieb befindet.

-) Ist der Betrieb einer unter sehr vielen gleichartigen Anbietern am Markt (Polypol), so kann er keinen Einfluss auf den Preis ausüben, sondern muss jenen Preis hinnehmen, der sich am Markt bildet (vollständige Konkurrenz).

-) Ist der Betrieb der einzige Anbieter am Markt (Monopol), so ist er in seiner Preispolitik weitgehend autonom.

j-138

##### Marktformen

||-) Vollständige Konkurrenz:

Wird ein Produkt von sehr vielen Produzenten in vergleichbarer Qualität hergestellt, so bildet sich am Markt ein Preis, den ein einzelner Betrieb nicht beeinflussen kann, da sein Marktanteil zu gering ist.

Diese Marktform nennt man vollständige Konkurrenz.

Eine Preiserhöhung eines einzelnen Anbieters hätte zur Folge, dass er sofort alle Abnehmer an seine Konkurrenten verlieren würde.

Eine Preissenkung eines einzelnen Anbieters hätte zur Folge, dass sich die Nachfrage auf ihn konzentriert. Da er diese aber nicht befriedigen könnte (er wäre innerhalb kürzester Zeit ausverkauft), würde er den maximalen Gewinn verfehlen (er hätte sein Produkt auch um den Marktpreis verkaufen können).

Der Betrieb muss bei vollständiger Konkurrenz den Marktpreis als konstanten Wert hinnehmen und die Produktionsmenge so anpassen, dass er seinen Gewinn maximiert.

-) Monopolbetrieb:

Wird ein Produkt nur von einem Produzenten hergestellt, so muss dieser Betrieb keinerlei Rücksicht auf andere Betriebe nehmen und kann den Preis selber festlegen. Die Konsumenten reagieren darauf mit einer Änderung der Nachfrage.

Diese Marktform nennt man (Angebots-)Monopol.

Eine Preiserhöhung hat zur Folge, dass die abgesetzte Menge sinkt.

Eine Preissenkung hat zur Folge, dass die abgesetzte Menge steigt.\||

---

Vollständige Konkurrenz

-) viele Anbieter (Polypol)

-) Preis konstant

Oft wird diese Marktform auch als vollkommene Konkurrenz bezeichnet.

Monopolbetrieb

-) ein Anbieter (Monopolist)

-) Preis variabel

### !!5.1.6 Erlös

|T|: Erlös =Menge mal Preis

Der Erlös entspricht dem Umsatz.

---

Erlöskurve bei vollständiger Konkurrenz

Die Erlösfunktion E ergibt sich aus dem Produkt von abgesetzter Menge x und dem zugehörigen Preis p\_N(x).

Erlösfunktion

E(x) =x \*p\_N(x)

abgesetzte Menge in ME

x

Erlös in GE bei der abgesetzten Menge x

E(x)

Erlöskurve bei einem Monopol

---

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Erlöskurve bei vollständiger Konkurrenz

Erlöskurve bei einem Monopol

##### Charakteristischer Verlauf der Erlösfunktion

||-) Erlös bei vollständiger Konkurrenz

Bei konstantem Preis p gilt: E(x) =p \*x

Die Erlöskurve ist in diesem Fall eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung p.

-) Erlös bei einem Monopolbetrieb

Bei einem variablen Preis p\_N(x) gilt: E(x) =x \*p\_N(x)

Die Erlöskurve besitzt zwei Nullstellen:

Eine bei x =0 (kein Absatz beim Höchstpreis) und eine bei der Sättigungsmenge x\_S.

Ist der Absatz gleich null, ist auch der Erlös gleich null:

E(0) =0 \*p\_N(0) =0

Ist der Preis gleich null, ist auch der Erlös gleich null:

E(x\_S) =x\_S \*0 =0

-) Bei kleiner Produktionsmenge steigt der Erlös durch den hohen Preis bei zunehmender Absatzmenge.

Bei großen Produktionsmengen ist der Preis aber so niedrig, dass trotz Erhöhung der Absatzmenge der Erlös fällt.

x\_E ist jene Menge, durch deren Verkauf der Erlös maximal wird.

Es gilt: E'(x\_E) =0

Maximaler Erlös: E\_(max) =E(x\_E)\||

---

j-139

+++Beispiel 5.7: |A, B|

Erlösfunktion eines Monopolbetriebs

Gegeben ist die Preisfunktion der Nachfrage p\_N mit p\_N(x) =9 -1,2 \*x für ein Produkt eines Monopolbetriebs.

a.)

Erstellen Sie die Erlösfunktion.

---

b.)

Ermitteln Sie die Nullstellen der Erlösfunktion.

---

c.)

Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

---

d.)

Stellen Sie die Preisfunktion und die Erlösfunktion grafisch dar.

---

Lösung:

a.)

E(x) =x \*P\_N(x) =x \*(9 -1,2 \*x) =9 \*x -1,2 \*x^2

---

b.)

0 =x \*(9 -1,2 \*x)

x =0 oder 9 -1,2 \*x =0 x =7,5

Die Erlösfunktion hat zwei Nullstellen:

Eine bei x =0 ME und eine bei der Sättigungsmenge x\_S =7,5 ME.

---

c.)

E'(x) =0:

E'(x) =9 -2,4 \*x 0 =9 -2,4 \*x

x =3,75

E\_(max) =E(3,75) =16,875

Der maximale Erlös beträgt 16,875 GE.

---

d.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

Die Ableitungsfunktion des Erlöses beschreibt, wie sich die Erlösfunktion ändert.

Die Ableitungsfunktionen ökonomischer Funktionen werden als Grenzfunktionen bezeichnet.

##### Definition: Grenzfunktion

||Die Ableitungsfunktion f' zu einer ökonomischen Funktion f heißt Grenzfunktion.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f(x\_0 +1) ~~f(x\_0) +f\*(x\_0)

Die Grenzfunktion f' an der Stelle x\_0 gibt näherungsweise die Änderung des Funktionswerts an, wenn die unabhängige Variable ausgehend von x\_0 um eine Einheit erhöht wird:

f\*(x\_0) ~~(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =

für 'De x =1

= (f(x\_0 ++1) -f(x\_0)/1 =f(x\_0 +1) -f(x\_0), also

f(x\_0 +1) ~~f(x\_0) +f\*(x\_0)

Falls f\*\*(x\_0) <0 gilt: f(x\_0 +1) <f(x\_0) +f'(x\_0)

##### Definition: Grenzerlösfunktion

Die erste Ableitungsfunktion E' zu einer Erlösfunktion E heißt Grenzerlösfunktion.

Die Grenzerlösfunktion gibt näherungsweise die Änderung des Erlöses an, wenn eine weitere Mengeneinheit abgesetzt wird:

E'(x\_0) ~~E(x\_0 +1) -E(x\_0), also E(x\_0 +1) -E(x\_0) +E'(x\_0)

E(x\_0 +1) -E(x\_0) +E'(x\_0)

j-140

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Diese Grafik zeigt den Unterschied zwischen Differenzenquotient und Differenzialquotient.

+++Beispiel 5.8: |B, C|

Grenzerlös eines Monopolbetriebs

Gegeben ist die Erlösfunktion E mit E(x) =9 \*x -1,2 \*x^2 für ein Produkt eines Monopolbetriebs.

a.)

Schätzen Sie mithilfe des Grenzerlöses bei 2 ME den Erlös für 3 ME.

---

b.)

Vergleichen Sie diesen Schätzwert mit dem tatsächlichen Erlös bei 3 ME.

---

Lösung:

a.)

Grenzerlösfunktion: E'(x) =9 -2,4 \*x Grenzerlös bei 2 ME: E'(2) =9 -2,4 \*2 =4,2 Der Grenzerlös bei 2 ME beträgt 4,2 GE/ME.

Geschätzter Erlös bei x =3 ME: E(3) ~~E(2) +E'(2) =13,2 +4,2 =17,4 GE

---

b.)

Tatsächlicher Erlös bei 3 ME: E(3) =9 \*3 -1,2 \*32 =16,2 Der tatsächliche Erlös bei 3 ME beträgt 16,2 GE.

(Die tatsächliche Erlösänderung für eine Absatzänderung von 2 ME auf 3 ME beträgt 3 GE.)

Zur Vereinfachung wird in weiterer Folge die Preisfunktion der Nachfrage mit p bezeichnet.

-----

|!|: Zur Vereinfachung wird in weiterer Folge die Preisfunktion der Nachfrage mit p bezeichnet.

### !!5.1.7 Preiselastizität der Nachfrage

Eine Preisänderung bewirkt im Allgemeinen eine Veränderung der nachgefragten Menge. Sowohl die absolute Änderung der Nachfrage als auch die absolute Änderung des Preises sind dabei abhängig von den gewählten Mengen- und Preiseinheiten.

Deshalb wird in der Ökonomie die Stärke der Nachfrageänderung aufgrund einer Preisänderung durch relative (prozentuelle) Änderungen ausgedrückt.

Diese relativen Änderungen sind einheitenunabhängig.

+++Beispiel 5.9: |B, D|

Preissteigerung von Benzin

Nach einer Preissteigerung von Benzin um 30 % (=('De p)/(p)) ändert sich die Absatzmenge um -6 % (=('De x)/(x)).

Untersuchen Sie die Stärke der Nachfrageänderung aufgrund der Preisänderung.

Lösung:

Der Quotient 'ep =(relative Mengenänderung)/(relative Preisänderung) =(('De x)/x)// (('De p)/p) =(-6 %)/(30 %) =(-0,2 %)/(1 %) =-0,2 gibt an, dass pro 1 % Preisanstieg die Absatzmenge um durchschnittlich 0,2 % fällt.

-----

##### Definition: (Bogen-)Elastizität der Nachfrage

||'ep =(relative Mengenänderung)/(relative Preisänderung) =(('De x)/x)// (('De p)/p) heißt (Bogen-)Elastizität der Nachfrage bzgl. x im Intervall [x; x +'De x].\||

---

Bogenelastizität

'ep =(('De x)/x)// (('De p)/p)

Pro 1 % Preisänderung ändert sich die Menge um 'ep %

Die Elastizität ist ein Maß für die Stärke der prozentuellen Mengenänderung ('De x)/x in Abhängigkeit von der prozentuellen Preisänderung ('De p)/p:

||Die Elastizität gibt an, dass sich pro 1 Prozent Preisänderung die Absatzmenge um durchschnittlich e Prozent ändert.

Die Bogenelastizität kann ermittelt werden, wenn eine Preisänderung 'De p =p\_1 -p\_0 und die zugehörige Mengenänderung 'De x =x\_1 -x\_0 gegeben sind.

Da im Allgemeinen eine Preissteigerung (positive Änderung) zu einem Absatzrückgang (negative Änderung) führt, gilt für die Elastizität der Nachfrage im Allgemeinen: e <=0\||

---

j-141

##### Werte der Elastizität der Nachfrage

{{Tabelle aufgelöst}}

Wert: 'ep <-1

Nachfrage ist: elastisch

Interpretation: relative Mengenänderung > relative Preisänderung relativ starke Reaktion der Nachfrage auf kleine relative Preisänderung (nicht lebensnotwendige Güter, z. B. Modeprodukte)

---

Wert: -1 <'ep <0

Nachfrage ist: unelastisch

Interpretation: relative Mengenänderung < relative Preisänderung relativ kleine Reaktion der Nachfrage auf Preis-änderung (wenig entbehrliche Güter, z. B. Brot, Heizöl)

---

Wert: 'ep =-1

Nachfrage ist: fließend

Interpretation: relative Mengenänderung =relative Preisänderung Eine Preisänderung von 1 % bewirkt eine Mengenänderung von 1 %.

---

Wert: Grenzfall: 'ep -> -'ue

Nachfrage ist: vollkommen elastisch

Interpretation: Kleinste Preisänderungen bewirken sehr große Nachfrageänderungen. Der Preis ist konstant, unabhängig von der Nachfragemenge (z. B. Geldscheine).

---

Wert: Grenzfall: 'ep =0

Nachfrage ist: vollkommen unelastisch

Interpretation: Keine Reaktion der Nachfrage auf Preisänderungen Die Nachfrage ist konstant, unabhängig vom Preis (z. B. lebensnotwendige Medikamente).

---

Richtwerte für Preiselastizitäten der Nachfrage:

{{Tabelle aufgelöst}}

Produkt: Tabak (für Raucher)

Elastizität: -0,4

---

Produkt: Lebensmittel

Elastizität: -0,7

---

Produkt: Fleisch

Elastizität: -1,3

---

Produkt: Bildung und Unterhaltung

Elastizität: -2,9

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

+++Beispiel 5.10: |B, C|

Unelastische Nachfrage

Der Preis eines Produkts wird von p\_0 =10 GE/ME auf p\_1 =9 GE/ME gesenkt.

Die Absatzmenge steigt dadurch von x\_0 =100 ME auf x\_1 =105 ME.

Ermitteln und interpretieren Sie die Bogenelastizität, insbesondere im Hinblick auf den Erlös.

---

Lösung:

Absolute Preisänderung:

'De p =p\_1 -p\_0 =9 -10 =-1

Relative Preisänderung:

('De p)/p =-1/(10) =-10 %

Absolute Mengenänderung:

'De x =x\_1 -x\_0 =105 -100 =5

Relative Mengenänderung:

('De x)/x =5/(100) =5 %

Bogenelastizität:

'ep =(('De x)/x)// (('De p)/p) =(5 %)/(-10 %) =-0,5

d. h. unelastisch

---

b.)

Eine Preissenkung um 1 % führt zu einer Absatzsteigerung um 0,5 %.

Erlös:

E(100) =x\_0 \*p\_0 =100 \*10 =1000 vor der Preissenkung

E(105) =x\_1 \*p\_1 =105 \*9 =945 nach der Preissenkung

Der Erlös hat um 5,5 % abgenommen.

---

Der Preis sinkt um 10 %, die nachgefragte Menge steigt um 5 % und der Erlös fällt um 5,5 %.

-----

##### Unelastische Nachfrage

||Senkt ein Produzent bei unelastischer Nachfrage seinen Preis, steht dem gesunkenen Preis eine geringere prozentuelle Mengensteigerung gegenüber. Der Erlös sinkt.

Erhöht ein Produzent bei unelastischer Nachfrage seinen Preis, steht dem erhöhten Preis ein kleinerer prozentueller Mengenrückgang gegenüber. Der Erlös steigt.\||

---

j-142

+++Beispiel 5.11: |B, C|

Elastische Nachfrage

Der Preis eines Produkts wird von p\_0 =10 GE/ME auf p\_1 =9 GE/ME gesenkt Die Absatzmenge steigt dadurch von x\_0 =100 ME auf x\_1 =115 ME.

a.)

Ermitteln Sie die Bogenelastizität.

---

b.)

Interpretieren Sie die Bogenelastizität im Hinblick auf den Erlös.

---

Lösung:

a.)

Absolute Preisänderung:

'De p =p\_1 -p\_0 =9 -10 =-1

Relative Preisänderung:

('De p)/p =-1/(10) =-10 %

Absolute Mengenänderung:

'De x =x\_1 -x\_0 =115 -100 =15

Relative Mengenänderung:

('De x)/x =(15)/(100) =15 %

Bogenelastizität:

'ep =(('De x)/x)// (('De p)/p) =(15 %)/(-10 %) =-1,5

d. h. unelastisch

---

b.)

Eine Preissenkung um 1 % führt zu einer Absatzsteigerung um 1,5 %.

Erlös:

E(100) =x\_0 \*p\_0 =100 \*10 =1000 vor der Preissenkung

E(105) =x\_1 \*p\_1 =115 \*9 =1035 nach der Preissenkung

Der Erlös ist um 3,5 % gestiegen.

---

Der Preis sinkt um 10 %, die nachgefragte Menge steigt um 15 % und der Erlös steigt um 3,5 %.

##### Elastische Nachfrage

||Senkt ein Produzent bei elastischer Nachfrage seinen Preis, steht dem gesunkenen Preis eine größere prozentuelle Mengensteigerung gegenüber. Der Erlös steigt.

Erhöht ein Produzent bei elastischer Nachfrage seinen Preis, steht dem erhöhten Preis ein größerer prozentueller Mengenrückgang gegenüber. Der Erlös sinkt.\||

---

##### Punktelastizität

Für allgemeine Untersuchungen von Preisfunktionen an beliebigen Stellen ist die Bogenelastizität ein unhandliches Instrument, da die Bogenelastizität nicht nur vom Preis abhängt, von dem ausgehend eine Änderung untersucht wird, sondern auch von der absoluten Preisänderung 'De p.

Ähnlich wie beim Übergang vom Differenzen- zum Differenzialquotienten ist es daher naheliegend, anstelle der Differenzen 'De p und 'De x die Differenziale 'dp und 'dx zu verwenden.

Wählt man die Preisänderung 'De p sehr klein, dann wird auch 'De x sehr klein.

Im Grenzübergang 'De x -> 0 ergibt sich für die Elastizität:

'ep(x) ='lim['De x -> 0]((('De x)/x)// (('De p)/p))) ='lim['De x -> 0]((p/x)// (('De p)/('De x)) =((p(x))/x)// (('dp(x))/('dx)) =(p(x))/x \*1/(p'(x))

---

##### Definition: (Punkt)Elastizität

||'ep =(p(x))/x \*1/(p'(x)) heißt (Punkt-)Elastizität der Nachfrage an der Stelle x.\||

---

'ep =(p(x))/x \*1/(p'(x))

|T|: Die Bogenelastizität entspricht dem Differenzenquotienten, die Punktelastizität entspricht dem Differenzialquotienten.

---

-) Die Punktelastizität kann ermittelt werden, wenn die Preisfunktion p bekannt ist.

-) Der Grenzübergang von der Bogen-zur Punktelastizität entspricht dem Grenzübergang vom Differenzen-zum Differenzialquotienten.

-) Die Elastizitätsfunktion e ist definiert für ]0; x\_S].

j-143

+++Beispiel 5.12: |A, B, D|

Punktelastizität

Ein Zeitschriftenverlag stellt fest, dass bei einem Stückpreis von € 5,00 insgesamt 10000 Zeitschriften pro Woche abgesetzt werden. Senkt der Verlag den Preis auf € 4,50, können zusätzlich 500 Stück pro Woche verkauft werden.

Bei jeder weiteren Preissenkung um € 0,50 pro Zeitschrift erhöht sich die Absatzmenge um jeweils 500 Stück.

{{Tabelle aufgelöst}}

Absatzmenge x in Stück: 10000

p(x) in €/Stück: 5,00

---

Absatzmenge x in Stück: 10500

p(x) in €/Stück: 4,50

---

a.)

Erstellen Sie die Preisfunktion der Nachfrage.

---

b.)

Ermitteln Sie den Verkaufspreis für den maximalen Erlös.

---

c.)

Ermitteln Sie die Funktion der Punktelastizität. Stellen Sie die Preisfunktion der Nachfrage, die Erlösfunktion und die Elastizitätsfunktion grafisch dar.

---

d.)

Beurteilen Sie, durch welche Preisstrategie der Erlös erhöht werden kann, wenn derzeit bei einem Stückpreis von € 10,00 insgesamt 5000 Zeitschriften abgesetzt werden.

---

e.)

Beurteilen Sie, durch welche Preisstrategie der Erlös erhöht werden kann, wenn derzeit bei einem Stückpreis von € 5,00 insgesamt 10000 Zeitschriften abgesetzt werden.

---

f.)

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Elastizität und maximalem Erlös.

---

Lösung:

a.)

Da eine konstante Preisänderung um € 0,50 eine konstante Mengenänderung um 500 Stück bewirkt, ist die Preisfunktion linear:

p(x) =a \*x +b

5 =10000 \*a +b | \*(-1)

4,5 =10500 \*a +b

-0,5 =500 \*a

a =-0,001;

b =15

p(x) =-0,001 \*x +15

---

b.)

E(x) =x \*p(x) =x \*(-0,001 \*x +15) =-0,001 \*x^2 +15 \*x

Maximaler Erlös: Setzen Sie E'(x) =0

E'(x) =-0,002 \*x +15

0 =-0,002 \*x +15

x\_E =7500

Die erlösmaximierende Menge beträgt 7500 Stück.

p(7500) =7,5

Der Verkaufspreis für den maximalen Erlös beträgt € 7,50 pro Stück.

---

c.)

p(x) =-0,001 \*x +15

p'(x) =-0,001

'ep(x) =(p(x))/x \*1/(p'(x)) =(-0.001 \*x +15)/x \*1/(-0,001) =1 -(15000)x

{{Tabelle aufgelöst}}

x in Stück: 0

E(x) in €: 0

p(x) in €/Stück: 15,00

'ep: nicht definiert

---

x in Stück: 5000

E(x) in €: 50000

p(x) in €/Stück: 10,00

'ep: -2

---

x in Stück: 7500

E(x) in €: 56250

p(x) in €/Stück: 7,50

'ep: -1

---

x in Stück: 10000

E(x) in €: 50000

p(x) in €/Stück: 5,00

'ep: -0,5

---

x in Stück: 15000

E(x) in €: 0

p(x) in €/Stück: 0,00

'ep: 0

---

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

d.)

Beim Preis € 10,00 und dem Absatz 5000 Stück ist die Nachfrage elastisch:

'ep(5000) =-2 <-1

Der Verlag sollte bei elastischer Nachfrage den Preis senken, um den Erlös zu erhöhen.

---

e.)

Beim Preis € 5,00 und dem Absatz 10000 Stück ist die Nachfrage unelastisch:

'ep(10000) =-0,5 <-1

Der Verlag sollte bei unelastischer Nachfrage den Preis erhöhen, um den Erlös zu erhöhen.

---

f.)

Der maximale Erlös wird bei einem Preis von € 7,50 pro Stück und einem Absatz von 7500 Stück erzielt, bei diesem Preis ist die Nachfrage fließend:

'ep(7500) =-1

---

j-144

+++Beispiel 5.13: |A, B, C|

Grenzerlösfunktion

Ein Monopolbetrieb hat für ein Produkt die Preisfunktion p mit p(x) =10 -0,1 \*x^2.

a.)

Erstellen Sie die Erlösfunktion, die Grenzerlösfunktion und die Funktion der Punktelastizität.

---

b.)

Ermitteln Sie den maximalen Erlös und die zugehörige Punktelastizität.

---

c.)

Stellen Sie die Erlösfunktion, die Grenzerlösfunktion, die Preisfunktion der Nachfrage sowie die Funktion der Punktelastizität grafisch dar.

Markieren Sie den elastischen und den unelastischen Bereich der Nachfrage.

---

d.)

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Elastizität und Erlös.

---

Lösung:

a.)

Erlösfunktion:

E(x) =x \*p(x) =x \*(10 -0,1 \*x^2) =10 \*x -0,1 \*x^3

Grenzerlösfunktion:

E'(x) =10 -0,3 \*x^2

Ableitung der Preisfunktion:

p'(x) =-0,2 \*x

Funktion der Punktelastizität:

'ep(x) =(p(x)/x \*1/(p'(x)) =(10 -0,1 \*x^2)/x \*1/(-0,2 \*x) =1/2 -(50)/(x^2)

---

b.)

Setzen Sie E'(x) =0

0 =10 -0,3 \*x^2

x ='w((100)/3)) ~~5,77 (x\_2 <0)

Maximumstelle, da E''(5,77) =-0,6 \*5,77 <0

E\_(max) =E(5,77) ~~38,5

Der maximale Erlös beträgt 38,5 GE.

'ep(5,77) =1/2 -(50)/(5,77^2) =-1

---

c.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

d.)

Im elastischen Bereich der Nachfrage führt eine Preissenkung zu einer Erhöhung des Erlöses.

Im unelastischen Bereich der Nachfrage führt eine Preiserhöhung zu einer Erhöhung des Erlöses.

Die Grenzerlösfunktion hat an der erlösmaximalen Stelle x\_E eine Nullstelle. Dort ist die Elastizität -1.

-----

||E'(x) =0 <--> 'ep(x) =-1

Am Erlösmaximum gilt für die Elastizität der Nachfrage: e =-1.\||

---

j-145

##### Übungsaufgaben

|T|: Im Allgemeinen ist die nachgefragte bzw. angebotene Menge x in ME gegeben, die Preise p(x) in GE/ME.

Achten Sie bei allen Koordinatensystemen auf eine geeignete Beschriftung der Achsen:

-) x in ME

-) p(x) in GE/ME

|T|: Eine Preisfunktion des Angebots ist im Allgemeinen steigend.

|T|: Eine Preisfunktion der Nachfrage ist im Allgemeinen fallend.

Eine Preisfunktion der Nachfrage ist definiert für das Intervall [0; x\_S].

---

+++5.001 |A, B, D|

Stellen Sie den Graphen der Preisfunktion in einem Diagramm dar. Argumentieren Sie, ob es sich um eine Preisfunktion des Angebots oder der Nachfrage handelt.

Ermitteln Sie für die Preisfunktionen der Nachfrage jeweils den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

a.)

p(x) =3 -x/4

**[]**

---

b.)

p(x) =3 +2 \*x

**[]**

---

c.)

p(x) =0,008 \*x^2 -x +30

**[]**

---

d.)

p(x) =(60 -3 \*x)/(x +5)

**[]**

-----

+++5.002 |B, D|

Argumentieren Sie, warum das angegebene Intervall der sinnvolle Definitionsbereich für die Preisfunktion der Nachfrage p\_N ist.

a.)

p\_N(x) =8 -0,2 \*x

[0; 40]

**[]**

---

b.)

p\_N(x) =0,015 \*x^2 -0,75 \*x +9

[0; 20]

**[]**

-----

+++5.003 |B|

Ermitteln Sie die Gleichung der Preisfunktion des Angebots.

Machen Sie eine Skizze.

a.)

Bei einem Preis von 2 GE/ME wird 1 ME angeboten, bei einem Preis von 5 GE/ME werden 10 ME angeboten.

Die Preisfunktion ist linear: p\_A(x) =a \*x +b

**[]**

---

b.)

Bei einem Preis von 1,75 GE/ME wird 1 ME angeboten.

Die Änderungsrate des Preises beträgt bei 2 ME 2,25 GE/(ME^2).

Beim Preis von 10 GE/ME werden 4 ME angeboten.

Die Preisfunktion ist quadratisch: p\_A(x) =a \*x^2 +b \*x +c

**[]**

-----

+++5.004 |B|

Ermitteln Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage.

Machen Sie eine Skizze:

a.)

Beim Preis 50 GE/ME werden 100 ME nachgefragt.

Die Sättigungsmenge beträgt 200 ME.

Die Preisfunktion ist linear: p\_N(x) =a \*x +b

**[]**

---

b.)

Der Höchstpreis beträgt 5 GE/ME.

Bei einem Preis von 2,6 GE/ME werden 2 ME nachgefragt.

Der Anstieg der Preisfunktion bei 2 ME beträgt -1,4 GE/(ME^2).

Die Preisfunktion ist quadratisch: p\_N(x) =a \*x^^ 2 +b \*x +c

**[]**

-----

+++5.005 |A, B, C|

Die Preisfunktion des Angebots p\_A für ein Produkt ist gegeben durch p\_A(x) =1 +2,5 \*'w(x). Der Graph der Preisfunktion der Nachfrage ist in der Randspalte dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion des Angebots im Diagramm ein.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie den Marktpreis in der Grafik ab.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den Marktpreis.

**[]**

-----

+++5.006 |B, C|

Stellen Sie die Graphen der Preisfunktionen in einem Diagramm dar. Berechnen Sie den Marktpreis.

Markieren Sie den Marktpreis in der Grafik.

a.)

p\_A(x) =1,2 \*x +2

p\_N(x) =18 -0,8 \*x

**[]**

---

b.)

p\_A(x) =3 +2 \*x

p\_N(x) =-1/4 \*x^2 +8

**[]**

---

c.)

p\_A(x) =0,01 \*x^2 +0,3 \*x +2

p\_N(x) =0,015 \*x^2 -0,75 \*x +9

**[]**

---

d.)

p\_A(x) =2 +0,5 \*x

p\_N(x) =(60 -3 \*x)/(x +5)

**[]**

-----

j-155

+++5.007 |B|

a.)

Ein Produkt lässt sich bei einem Preis von 120 GE/ME nicht mehr absetzen. Die Sättigungsmenge liegt bei 30 ME.

Bei einem Preis von 50,4 GE/ME lassen sich 12 ME absetzen.

Erstellen Sie eine quadratische Preisfunktion der Nachfrage, die diese Bedingungen erfüllt.

**[]**

---

b.)

Von den Produzenten weiß man, dass sie ihre Produktion bei einem Preis von 30 GE/ME einstellen.

Bei einem Preis von 47 GE/ME bieten sie 10 ME an.

Erstellen Sie die lineare Preisfunktion des Angebots.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Marktpreis.

**[]**

-----

+++5.008 |A, B, C|

In der Grafik sind die Preisfunktionen der Nachfrage p\_N und des Angebots p\_A für Mietwohnungen in einer Stadt dargestellt.

(Mietpreis in €/(m^2), Wohnungen in 1000)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie den Marktpreis ab.

**[]**

---

b.)

Die Mietervereinigung erreicht, dass vom Staat ein Höchstpreis von 8 Euro pro m^2 festgelegt wird. Lesen Sie den Nachfrageüberhang ab.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie die Gleichungen der beiden Preisfunktionen.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den Marktpreis und den Nachfrageüberhang.

**[]**

-----

+++5.009 |A, B, C|

In der Grafik sind die Preisfunktionen der Nachfrage p\_N und des Angebots p\_A für Milch dargestellt.

(Milchpreis in €/Liter, Menge in 1000 Liter)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie den Marktpreis ab.

**[]**

---

b.)

Die Bauernvereinigung erreicht, dass vom Staat ein Mindestpreis von 50 Cent pro Liter festgelegt wird.

Lesen Sie den Angebotsüberhang ab.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie die Gleichungen der beiden Preisfunktionen.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den Marktpreis und den Angebotsüberhang.

**[]**

-----

+++5.010 |A, B, C, D|

Für Benzin sind die Preisfunktionen der Nachfrage p\_N und des Angebots p\_A gegeben:

p\_N(x) =1,8 -0,12 \*x

p\_A(x) =0,008 \*x^2 +0,12 \*x +0,4

x Menge in Millionen Liter

p\_N(x) Preis in €/Liter bei der nachgefragten Menge x

p\_A(x) Preis in €/Liter bei der angebotenen Menge x

a.)

Stellen Sie die Graphen der Preisfunktionen in einem Diagramm dar.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

Markieren Sie diese Werte im Diagramm.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die Gleichgewichtsmenge und den Marktpreis.

Markieren Sie diese Werte im Diagramm.

**[]**

---

d.)

Der Staat setzt für Benzin einen Preis von maximal 1 €/Liter fest.

Erklären Sie, welcher Überhang vorliegt. Berechnen Sie diesen.

**[]**

-----

+++5.011 |A, B|

Von einem Monopolbetrieb ist die Preisfunktion der Nachfrage gegeben.

Erstellen Sie die Erlösfunktion und ermitteln Sie das Erlösmaximum (auf 2 Dezimalstellen genau). Machen Sie eine Skizze.

a.)

p\_N(x) =100 -0,5 \*x

**[]**

---

b.)

p\_N(x) =-0,1 \*x^2 -x +5

**[]**

---

c.)

p\_N(x) =15 \*(2 -0,1 \*x)^2

**[]**

---

d.)

p\_N(x) =(1000)/(x +20) -8

**[]**

-----

+++5.012 |B, C, D|

Zum Jahreswechsel erhöht eine Eisenbahngesellschaft den Fahrpreis B von 0,20 €/km auf 0,22 €/km. Danach verzeichnet sie einen Rückgang der pro Monat von Fahrgästen gefahrenen Strecke von 2000000 km auf 1900000 km.

a.)

Ermitteln und interpretieren Sie die Bogenelastizität für diese Preiserhöhung.

**[]**

---

b.)

Beschreiben Sie die Auswirkung der Preiserhöhung auf den Erlös. Berechnen Sie die Erlösänderung.

**[]**

-----

j-147

Bogenelastizität:

'ep =(relative Mengenänderung)/(relative Preisänderung) =(('De x)/x)// (('De p)/p)

+++5.013 |B, C, D|

Ein Buchverlag stellt fest, dass von einem Buch bei einem Stückpreis von € 15,00 pro Monat 1000 Bücher abgesetzt werden können.

Senkt der Verlag den Preis auf € 14,00 pro Buch, können weitere 50 Stück des Buches pro Monat verkauft werden.

a.)

Ermitteln und interpretieren Sie die Bogenelastizität für diese Preissenkung.

**[]**

---

b.)

Beschreiben Sie die Auswirkung der Preiserhöhung auf den Erlös.

Berechnen Sie die Erlösänderung.

**[]**

-----

+++5.014 |C, D|

|D| Arbeiten Sie bei der Übungsaufgabe 5.014 in Gruppen.

Kreuzen Sie an, ob die Nachfrage nach den angeführten Produkten elastisch oder unelastisch ist.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

{{ZI: Schreiben Sie elastisch oder unelastisch in die Eingabemarke neben den Produkten.}}

Getreide: **[]**

Lacoste-T-Shirt: **[]**

Fahrkarte Wiener Linien: **[]**

Zigaretten für süchtige Raucher: **[]**

VW Polo: **[]**

Butter: **[]**

Konzertkarten: **[]**

-----

+++5.015 |C, D| |D| Arbeiten Sie bei der Übungsaufgabe 5.015 in Gruppen.

Die Nachfrage nach Autos ist elastisch.

a.)

Ein BMW X4 hat eine Elastizität von ca. -3,5.

Erklären Sie, was diese Preiselastizität bedeutet.

**[]**

---

b.)

Die Elastizität eines Ford Focus beträgt ca. -6.

Erklären Sie, warum der Betrag der Elastizität bei einem Ford Focus größer ist als bei einem BMW X4.

**[]**

-----

Produktelastizität:

'ep(x) =(p(x))/x \*1/(p'(x))

---

+++5.016 |A, B, C, D|

Ein Zahnpastaproduzent kann bei einem Preis von € 3,00 pro Tube täglich 1000 Tuben absetzen.

Senkt er den Preis um € 0,50, können täglich 500 Tuben mehr abgesetzt werden. Bei jeder weiteren Preissenkung um € 0,50 erhöht sich die Absatzmenge um 500 Tuben täglich.

a.)

Berechnen und interpretieren Sie die Bogenelastizität für die Preissenkung von € 3,00 auf € 2,50 pro Tube.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie die lineare Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Funktion der Punktelastizität der Nachfrage.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie die Punktelastizität für einen Absatz von 1000 Tuben.

**[]**

---

f.)

Ermitteln Sie Preis und Absatz für die Punktelastizität -1.

**[]**

---

g.)

Zeigen Sie, dass beim Preis mit der Punktelastizität -1 der Erlös maximal ist.

**[]**

-----

+++5.017 |B, C|

In den Diagrammen in der Randspalte sind für ein Produkt die Graphen der Preisfunktion der Nachfrage p\_N und der zugehörigen Elastizität 'ep dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge ab.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die erlösmaximierende Menge ab.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie näherungsweise das Erlösmaximum.

**[]**

-----

+++5.018 |B|

a.)

Berechnen Sie den Preis, bei dem die Preisfunktion der Nachfrage p\_N(x) =4 -0,02 \*x die Punktelastiztät -1,5 hat.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Preis, bei dem die Preisfunktion der Nachfrage p\_N(x) =-0,01 \*x^2 -0,2 \*x +5 die Punktelastiztät -0,5 hat.

**[]**

-----

j-148

## !!5.2 Kostenrechnung

### !!5.2.1 Gesamtkosten

Die Gesamtkosten K(x) sind der Gesamtbetrag, der zur Herstellung von x Einheiten einer Ware erforderlich ist.

Diese Gesamtkosten setzen sich aus den variablen Kosten K\_v(x) und den Fixkosten F zusammen.

Eine strenge Trennung zwischen Fixkosten und variablen Kosten ist oft nicht möglich.

Die variablen Kosten K\_v(x) werden durch die laufende Produktion und somit durch die erzeugte Menge bestimmt. Dazu gehören: Rohstoffkosten, Energiekosten, Arbeitskosten usw. Bei Produktionsstillstand fallen keine variablen Kosten an: K\_v(0) =0.

---

|T|: K(x) =K\_v(x) +F

Die Gesamtkosten K(x) für x Stück setzen sich aus den variablen

Kosten K\_v(x) und den Fixkosten F zusammen.

---

Unter den Fixkosten F versteht man alle Kosten, die unabhängig von der erzeugten Menge sind und in einem bestimmten Zeitraum konstant bleiben.

Dazu gehören:

-) Steuern für Grundstücke und Gebäude

-) Grundgebühren für Gas, Wasser, Strom, Telefon usw.

-) Mieten

-) Versicherungsprämien

-) Unterhaltskosten für Maschinen

-) Gehälter der Vorstandsmitglieder

-) etc.

Die Fixkosten werden auch als Kosten der Produktionsbereitschaft bezeichnet und fallen daher auch bei Stillstand der Produktion an. Daher gilt: F =K(0).

Die tatsächlichen Beträge für die Kosten werden mit meist erheblichem Rechenaufwand aus der innerbetrieblichen Kostenrechnung in Tabellenform geliefert. Die dazu passende Funktionsgleichung wird dann aus den Wertepaaren berechnet. Da die Wertepaare meist nicht alle auf einer gemeinsamen Funktion liegen, erhält man eine "hinreichend genaue" Funktion häufig durch die Regressionsrechnung.

##### Definition: Gesamtkostenfunktion

||Die Gesamtkosten für die Produktion von x ME setzen sich aus den variablen Kosten und den Fixkosten zusammen:

Gesamtkosten =variable Kosten +Fixkosten

K(x) =K\_v(x) +F

K(0) =F\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph Lineare Kostenfunktion nicht übertragen}}

{{Grafik: Funktionsgraph Neoklassische Kostenfunktion nicht übertragen}}

{{Grafik: Funktionsgraph Ertragsgesetzliche Kostenfunktion nicht übertragen}}

##### Typen von Kostenfunktionen

||-) Lineare Kostenfunktion:

K(x) =k \*x +F

F Fixkosten

k proportionale Kosten, Kosten pro Produktionseinheit ohne Fixkostenanteil

K\_v(x) =k \*x

-) Neoklassische Kostenfunktion:

progressiver Kostenverlauf K(x) =a \*x^2 +b \*x +F

a >0

-) Ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

zuerst degressiver, dann progressiver Kostenverlauf

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

a >0, b <0, c >0, F >0

Der Definitionsbereich der Kostenfunktionen ist 0 <=x <=C.

Die Kapazität C ist die pro Zeiteinheit maximal herstellbare Menge.\||

---

j-149

### !!5.2.2 Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Die Herstellung von Waren wird durch den Einsatz von Produktionsfaktoren (im Wesentlichen Arbeit und Kapital) ermöglicht. Dabei entstehen Kosten, die in Abhängigkeit von der produzierten Menge dargestellt werden können.

Schon im 18. Jahrhundert hat der französische Ökonom Jacques Turgot als Ertragsgesetz für die Landwirtschaft festgestellt: Erhöht man stetig den Arbeitseinsatz, so nimmt der Ertragzuwachs zunächst schnell zu.

Allerdings führt bald eine Erhöhung des Arbeitseinsatzes zu einer Abnahme des Ertragszuwachses: Zu viele Arbeiter auf einem Feld behindern einander.

Dieses Modell führt zu einer s-förmigen Kostenfunktion.

{{Grafik: Jacques Turgot, 1727 bis 1781, französischer Ökonom}}

+++Beispiel 5.14: |B, C|

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion - Spargelernte

Bei einer Spargelernte wurde der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Arbeitskräfte und der Erntemenge in kg pro Stunde untersucht.

Dieser Zusammenhang ist in der Tabelle in der Randspalte dargestellt.

a.)

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Arbeitskräfte und der Erntemenge grafisch dar.

Stellen Sie den Ertragszuwachs (Mengenzuwachs) in der Grafik dar.

Beschreiben Sie, wie sich der Ertragszuwachs in Abhängigkeit von der Anzahl der Arbeitskräfte entwickelt.

---

b.)

Die Fixkosten betragen € 20,00 pro Stunde, die variablen Kosten betragen € 10,00 pro Arbeitskraft pro Stunde.

Ermitteln Sie die Gesamtkosten. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Erntemenge in kg und den Gesamtkosten in Euro grafisch dar.

---

Lösung:

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

Anzahl Arbeitskräfte: 0

Erntemenge x in kg: 0

Ertragszuwachs in kg: 10

---

Anzahl Arbeitskräfte: 1

Erntemenge x in kg: 10

Ertragszuwachs in kg: 20

---

Anzahl Arbeitskräfte: 2

Erntemenge x in kg: 30

Ertragszuwachs in kg: 30

---

Anzahl Arbeitskräfte: 3

Erntemenge x in kg: 60

Ertragszuwachs in kg: 50

---

Anzahl Arbeitskräfte: 4

Erntemenge x in kg: 110

Ertragszuwachs in kg: 40

---

Anzahl Arbeitskräfte: 5

Erntemenge x in kg: 150

Ertragszuwachs in kg: 30

---

Anzahl Arbeitskräfte: 6

Erntemenge x in kg: 180

Ertragszuwachs in kg: 20

---

Anzahl Arbeitskräfte: 7

Erntemenge x in kg: 200

Ertragszuwachs in kg: -

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

|T|: s-Förmige Kostenfunktionen können durch kubische Polynome modelliert werden.

---

Für wenige Arbeitskräfte steigt der Ertragszuwachs. Den größten Ertragszuwachs erhält man bei Erhöhung von 3 auf 4 Arbeitskräfte.

Ab 4 Arbeitskräften sinkt der Ertragszuwachs.

---

b.)

{{Tabelle aufgelöst}}

Anzahl Arbeitskräfte: 0

Erntemenge x in kg: 0

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 0

Gesamtkosten K(x) in €: 20

---

Anzahl Arbeitskräfte: 1

Erntemenge x in kg: 10

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 10

Gesamtkosten K(x) in €: 30

---

Anzahl Arbeitskräfte: 2

Erntemenge x in kg: 30

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 20

Gesamtkosten K(x) in €: 40

---

Anzahl Arbeitskräfte: 3

Erntemenge x in kg: 60

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 30

Gesamtkosten K(x) in €: 50

---

Anzahl Arbeitskräfte: 4

Erntemenge x in kg: 110

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 40

Gesamtkosten K(x) in €: 60

---

Anzahl Arbeitskräfte: 5

Erntemenge x in kg: 150

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 50

Gesamtkosten K(x) in €: 70

---

Anzahl Arbeitskräfte: 6

Erntemenge x in kg: 180

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 60

Gesamtkosten K(x) in €: 80

---

Anzahl Arbeitskräfte: 7

Erntemenge x in kg: 200

Fixkosten F in €: 20

Variable Kosten K\_v(x) in €: 70

Gesamtkosten K(x) in €: 90

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Sie erhalten einen s-förmigen Graphen der Kostenfunktion.

-----

j-150

+++Beispiel 5.15: |C, D|

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion -Keksproduktion

Die Firma Tanner ist ein österreichischer Traditionsbetrieb, der die Kekssorte "Kaiserrolle" herstellt.

Die monatlichen Kosten zur Produktion der Kekssorte können näherungsweise durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

K(x) =x^3 -8 \*x^2 +24 \*x +50

x Produktionsmenge in ME (1 ME =100000 Stück)

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME (1 GE =1000 €)

Beschreiben Sie das Verhalten der Kostenfunktion K.

Lösung:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei Anlauf der Produktion kommt es zu einem starken Anstieg der Gesamtkosten, weil die variablen Kosten stark steigen. Der gesamte Betrieb muss arbeiten, obwohl Maschinen und Arbeiter nicht ausgelastet sind.

Die Steigung der Kostenfunktion verringert sich zunächst mit wachsender Produktion, da die vorhandenen Kapazitäten besser ausgenutzt werden.

Die Kostenkurve verläuft degressiv.

Steigt die Produktion weiter, wird die Menge x\_k (Wendestelle) erreicht, ab der der Anstieg der Kostenfunktion wieder wächst.

Eine hohe Auslastung des Betriebs verursacht hohe Zusatzkosten (Überstunden).

Die Steigung der Kostenfunktion nimmt zu.

Die Kostenkurve verläuft progressiv.

Die Produktionsmenge x\_k, die Stelle des Wendepunkts der Kostenfunktion, wird als Kostenkehre bezeichnet. Bei der Kostenkehre geht der degressive in den progressiven Kostenverlauf über.

K'(x) =3 \*x^2 -16 \*x +24

K''(x) =6 \*x -16

Für K''(x) =0 erhält man die Kostenkehre x\_k =2,6^. ME, also bei ca. 267000 Keksen.

-----

##### Kostenkehre

||Die Kostenkehre für eine ertragsgesetzliche (kubische) Kostenfunktion K ist die Produktionsmenge x\_k, bei der der Kostenverlauf von degressiv auf progressiv übergeht, also die Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

K''(x\_k) =0\||

---

Kostenkehre x\_k

K''(x\_k) =0

---

Charakteristisch für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist das monotone Wachstum und der s-förmige Verlauf (zuerst degressiv, dann progressiv).

##### Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen

||Eine kubische Polynomfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F beschreibt für x >=0 eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion, wenn gilt:

-) K nimmt nur positive Werte an, insbesondere F >0.

-) K ist streng monoton steigend.

-) K hat keine Extremwerte.

-) K hat einen Wendepunkt.

Bedingungen für die Koeffizienten:

a >0; b <0; c >0; F >0; b^2 <3 \*a \*c\||

---

j-151

Kostenrechnung

+++Beispiel 5.16: |C, D|

Eigenschaften einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Zeigen Sie, dass die Bedingungen für die Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F gültig sind.

Lösung:

Es gilt:

1. K nimmt nur positive Werte an, insbesondere F >0

2. K ist streng monoton steigend, d. h. K'(x) >0

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c >0, d. h. auch K'(0) =c >0

3. K hat keine Extremwerte, d. h. K'(x) =0 darf keine reelle Lösung besitzen.

K'(x) =0: 0 =3 \*a \*x 2 +2 \*b \*x +c

x\_(1, 2) =(-2 \*b +-'w(4 \*b^2 -4 \*3 \*a \*c))/(2 \*3 \*a) hat keine Lösung, wenn 4 \*b^2 -4 \*3 \*a \*c <0, d.h. b^2 <3 \*a \*c

4. K hat einen Wendepunkt (degressiv/progressiv)

K''(x) =0: 0 =6 \*a \*x +2 \*b

<--> x\_k =-b/(3 \*a)

Da K' an dieser Stelle minimal sein soll, muss gelten:

K'''(x) =6 \*a >0, d. h. a >0

Da x\_k <0, gilt: b <0

-----

+++Beispiel 5.17: |C, D|

Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen grafisch prüfen

Im Diagramm in der Randspalte sind die Graphen von vier Funktionen K\_1, K\_2, K\_3 und K\_4 dargestellt.

Argumentieren Sie, welche dieser Funktionen ertragsgesetzliche Kostenfunktionen sind.

Lösung:

-) K\_1 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Graph zuerst progressiv, dann degressiv verläuft.

-) K\_2 erfüllt alle Eigenschaften und ist ertragsgesetzlich.

-) K\_3 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Graph nicht streng monoton steigend ist und Extremwerte besitzt.

-) K\_4 ist nicht ertragsgesetzlich, da die Fixkosten negativ sind.

{{Grafik: Funktionsgraphen von K\_1 bis K\_4 nicht übertragen}}

-----

+++Beispiel 5.18: |B, C, D|

Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen rechnerisch prüfen

Überprüfen Sie anhand der Koeffizienten, ob folgende Kostenfunktionen ertragsgesetzlich sind:

a.)

K\_1(x) =0,1 \*x^3 -0,6 \*x^2 +1,4 \*x +1

---

b.)

K\_2(x) =0,1 \*x^3 -0,6 \*x^2 +x +1

---

c.)

K\_3(x) =0,1 \*x^3 +0,6 \*x^2 +0,1 \*x +1

---

Lösung:

a.)

K\_1 ist ertragsgesetzlich, da a =0,1 >0; b =-0,6 <0; c =1,4 >0; F =1 >0 und b^2 =0,36 <3 \*0,1 \*1,4 =0,42 =3 \*a \*c.

---

b.)

K\_2 ist nicht ertragsgesetzlich, da b^2 =0,36 >3 \*0,1 \*1 =0,3 =3 \*a \*c.

---

c.)

K\_3 ist nicht ertragsgesetzlich, da b >0.

-----

j-152

### !!5.2.3 Durchschnittskosten

Dividiert man die Gesamtkosten K(x) durch die Produktionsmenge x, erhält man die Stückkosten K^-(x).

Diese Stückkosten K(x) geben an, wie viel die Produktion einer einzigen Einheit im Durchschnitt kostet, wenn insgesamt x Mengeneinheiten produziert werden.

##### Durchschnitts- oder Stückkosten

||Fallen bei der Produktion von x Mengeneinheiten die Gesamtkosten K(x) an, die sich aus den variablen Kosten K\_v(x) und den fixen Kosten F zusammensetzen, so nennt man

K^-(x) =(K(x))/x durchschnittliche Gesamtkosten, Stückkosten K\_v(x) =(K\_v(x))/x durchschnittliche variable Kosten\||

---

|T|: Wird die Produktionsmenge in Mengeneinheiten angegeben, spricht man von Durchschnittskosten.

Wird die Produktionsmenge in Stück angegeben, spricht man von Stückkosten.

---

Die durchschnittlichen Gesamtkosten erhält man durch Addition der durchschnittlichen variablen Kosten und der durchschnittlichen fixen Kosten.

Aus K(x) =K\_v(x) +F folgt

K^- =(K(x))/x =(K\_v(x))/x +F/x

##### Betriebsoptimum

|!|: Um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden, werden meistens die produzierte Menge in ME und die Kosten in GE angegeben.

+++Beispiel 5.19: |A, B, C|

Durchschnittskosten und Betriebsoptimum

Um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden, werden meistens die produzierte Menge in ME und die Kosten in GE angegeben

Die monatlichen Kosten zur Produktion der Kekssorte "Kaiserrolle" können durch die Kostenfunktion K beschrieben werden:

K(x) =x^3 -8 \*x^2 +24 \*x +50

x Produktionsmenge in ME (1 ME =100000 Stück)

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME (1 GE =1000 €)

a.)

Erstellen Sie die Stückkostenfunktion K.

---

b.)

Zeichnen Sie den Graphen von K und interpretieren Sie diesen im Hinblick auf Extrema.

---

c.)

Ermitteln Sie das Minimum von K.

---

Lösung:

a.)

K+-(x) =(K(x))/x =(x^3 -8 \*x^2 +24 \*x +50)/x =x^2 -8 \*x +24 +(50)/x

---

b.)

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Graph der Stückkostenfunktion K^- besitzt ein Minimum.

---

c.)

Berechnung des Minimums von K:

K^-(x) =2 \*x -8 -(50)/(x^2)

K^-''(x) =0 -> 0 =2 \*x -8 -(50)/(x^2) | \*x^2

0 =2 \*x^3 -8 \*x^2 -8 \*x^2 -50

kubische Gleichung

Lösung mit Technologie: x =5

Bei einer Produktion von 5 ME, also 500000 Stück, sind die Stückkosten minimal.

Diese Produktionsmenge heißt Betriebsoptimum x\_(opt).

Minimale Stückkosten: K(5) =19

Die minimalen Stückkosten betragen 19 GE/ME, also (19000)/(100000) =0,19 €/Stück.

Der Preis, der diesen minimalen Stückkosten entspricht, heißt langfristige Preisuntergrenze.

j-153

##### Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze

||-) Das Betriebsoptimum ist die Produktionsmenge x\_(opt), für die die durchschnittlichen Gesamtkosten minimal sind.

-) Die langfristige Preisuntergrenze p\_l ist der Preis, der den minimalen Durchschnittskosten entspricht.\||

---

Betriebsoptimum:

K^-'(x\_(opt)) =0

Langfristige Preisuntergrenze:

p\_l =K^-(x\_(opt))

---

-) Produziert ein Betrieb im Betriebsoptimum und verkauft sein Produkt zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze, so produziert er gerade kostendeckend.

-) Liegt der Preis unter der langfristigen Preisuntergrenze, macht der Betrieb einen Verlust.

-) Liegt der Preis über der langfristigen Preisuntergrenze, macht der Betrieb einen Gewinn.

##### Grafische Ermittlung des Betriebsoptimums x\_(opt) aus der Gesamtkostenkurve

||Man zeichnet jene Gerade durch den Ursprung, die Tangente an die Gesamtkostenkurve ist.

Der x-Wert des zugehörigen Berührungspunktes B ist das Betriebsoptimums x\_(opt).\||

---

Begründung: Für Geraden durch den Ursprung gilt:

Die Steigung der Geraden entspricht den Durchschnittskosten.

Ist die Ursprungsgerade Tangente an die Gesamtkostenkurve, hat sie die geringste Steigung unter allen Verbindungsgeraden vom Ursprung zu einem Kurvenpunkt. Somit entspricht sie den geringsten Durchschnittskosten (langfristige Preisuntergrenze).

##### Betriebsminimum

+++Beispiel 5.20: |A, B, C|

Variable Durchschnittskosten und Betriebsminimum

Die monatlichen Kosten zur Produktion der Kekssorte "Kaiserrolle" können durch die Kostenfunktion K beschrieben werden:

K(x) =x^3 -8 \*x^2 +24 \*x +50

x Produktionsmenge in ME (1 ME =100000 Stück)

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME (1 GE =1000 €)

a.)

Erstellen Sie die variable Kostenfunktion K\_v und die variable Stückkostenfunktion K\_v.

---

b.)

Zeichnen Sie den Graphen von K^-\_v und interpretieren Sie diesen im Hinblick auf Extrema.

---

c.)

Ermitteln Sie das Minimum von K\_v.

---

Lösung:

a.)

K\_v =x^3 -8 \*x^2 +24 \*x

K^-\_v(x) =(K^-\_v(x))/x =(x^3 -8 \*x^2 +24 \*x)/x =x^2 -8 \*x +24

für x >0

---

b.)

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Graph von K\_v besitzt ein Minimum.

---

c.)

Berechnung des Minimums von K\_v:

K^-\_v'(x) =2 \*x -8

K^-\_v'(x) =0 --> 0 =2 \*x -8

x =4

Bei einer Produktion von 4 ME, also von 400000 Stück, sind die variablen Stückkosten minimal.

Diese Produktionsmenge heißt Betriebsminimum.

Minimale variable Stückkosten: K\_v(4) =8

Die minimalen variablen Stückkosten betragen 8 GE/ME, also (8000)/(100000) =0,08 €/Stück.

Der Preis, der diesen minimalen variablen Stückkosten entspricht, heißt kurzfristige Preisuntergrenze.

-----

j-154

##### Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze

||Das Betriebsminimum ist die Produktionsmenge x\_(min), für die die durchschnittlichen variablen Gesamtkosten minimal sind.

Die kurzfristige Preisuntergrenze p\_k ist der Preis, der den minimalen variablen Durchschnittskosten entspricht.\||

---

Betriebsminimum: K^-\_v(x\_(min)) =0

Kurzfristige Preisuntergrenze: p\_k =K^-\_v(x\_(min))

Grafische Ermittlung des Betriebsminimums:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

-) Produziert ein Betrieb im Betriebsminimum und verkauft sein Produkt zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze, so sind die variablen Kosten gedeckt.

-) Ein Betrieb kann kurzfristig auf die Deckung der Fixkosten verzichten, da diese auch bei Einstellung der Produktion anfallen würden.

-) Liegt der Preis allerdings unter der kurzfristigen Preisuntergrenze, ist die Produktionseinstellung kostengünstiger als die Weiterproduktion.

##### Grafische Ermittlung des Betriebsminimums x\_(min)

||-) Die grafische Ermittlung des Betriebsminimums x\_(min) erfolgt wie die des Betriebsoptimums x\_(opt).

-) Man zeichnet die Tangente an die Gesamtkostenkurve K ausgehend von (0|F).

-) Der x-Wert des Berührungspunktes B ist das Betriebsminimum x\_(min).

-) Die Steigung der Tangente entspricht der kurzfristigen Preisuntergrenze.\||

### !!5.2.4 Grenzkosten

Zur Beschreibung der Änderung einer Kostenfunktion dient ihre Ableitung.

##### Definition: Grenzkosten

||Die erste Ableitungsfunktion K' einer Kostenfunktion K heißt Grenzkostenfunktion. Ihr Graph heißt Grenzkostenkurve.\||

---

Die Grenzkostenfunktion gibt näherungsweise die Änderung der Kosten an, die sich durch die Produktion einer weiteren Mengeneinheit ergibt:

K'(x\_0) ~~((K(x\_0 +'De x) -K(x\_0))/('De x) =

für 'De x =1

= (K(x\_0 +1) -K(x\_0))/1 =K(x\_0 +1) -K(x\_0)

---

In der wirtschaftlichen Praxis wird durch die Grenzkosten bei einer bestimmten Produktionsmenge K'(x) der Kostenzuwachs bezogen auf den Produktionszuwachs von einer ME ausgedrückt:

K'(x) ~~K(x +1) -K(x)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Mittlere Kostenänderung im Intervall [x\_0; x\_1]: ('De K)/('De x) =(K(x\_1) -K(x\_0))/(x\_1 -x\_0)

Grenzkosten an der Stelle x\_0:

K'(x\_0) ='lim['De x -> 0](('De K)/('De x))

---

+++Beispiel 5.21: |B, C|

Grenzkosten

Die monatlichen Kosten zur Produktion der Kekssorte "Kaiserrolle" können durch die Kostenfunktion K beschrieben werden:

K(x) =x^3 -8 \*x^2 +24 \*x +50

x Produktionsmenge in ME (1 ME =100000 Stück)

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME (1 GE =1000 €)

a.)

Berechnen Sie die mittlere Kostenänderung, wenn die Produktion von 4 ME auf 6 ME erhöht wird.

---

b.)

Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 4 ME.

---

c.)

Interpretieren Sie die berechneten Werte geometrisch.

---

d.)

Zeichnen Sie die Grenzkostenkurve. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen den Grenzkosten und der Kostenkehre.

---

{{Lösung auf Seite 155}}

j-155

Lösung:

a.)

Mittlere Kostenänderung für das Produktionsintervall [4; 6]:

('De K)/('De x) =(K(6) -K(4))/(6 -4) =(122 -82)/(6 -4) =(40)/2 =20

Die mittlere Kostenänderung beträgt 20 GE/ME, d. h. pro 100000 Stück Kekse steigen die Kosten um € 20000, also um 0,20 €/Stück.

----

b.)

Grenzkostenfunktion: K'(x) =3 \*x^2 -16 \*x +24

K'(4) =3 \*4^2 -16 \*4 +24 =8

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 4 ME betragen 8 GE/ME, d. h. 0,08 € pro Stück. Wird die Produktion von 4 ME auf 5 ME erhöht, erhöhen sich die Kosten um ca. 0,08 €.

---

c.)

Die mittlere Kostenänderung entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte auf der Kostenkurve an den Stellen x =4 und x =6.

Die Grenzkosten entsprechen der Steigung der Tangente im Punkt an der Stelle x =4 an die Kostenkurve.

---

d.)

Grenzkostenkurve: siehe Randspalte.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Die Grenzkostenkurve K' ist in jenem Bereich fallend, in dem K degressiv verläuft.

An der Kostenkehre hat die Grenzkostenkurve K' ein Minimum.

Die Grenzkostenkurve K' ist in jenem Bereich steigend, in dem K progressiv verläuft.

-----

##### Beziehung zwischen den Kostenkurven

-) Die Grenzkostenkurve K' einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K nimmt an der Stelle x\_k des Wendepunktes von K, der Kostenkehre, ihren minimalen Wert K'(x\_k) an.

-) Die Grenzkostenkurve K' und die Durchschnittskostenkurve K schneiden einander im Betriebsoptimum, d. h. K'(x\_(opt)) =K^-(x\_(opt))

Rechnerische Begründung:

Zur Berechnung des Betriebsoptimums setzt man K'(x) =0.

Mit der Quotientenregel erhält man.

K^-'(x) =((K(x))/x)' =(K'(x) \*x -K(x) \*1)/(x^2)

K^-'(x) =0 -> K'(x) \*x -K(x) =0

<--> K'(x) =(K(x))/x

<--> K'(x) =K^-(x) für x =x\_(opt)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Betriebswirtschaftliche Begründung:

Bei niedrigen Produktionsmengen liegen die Grenzkosten unter den Durchschnittskosten, sodass die Durchschnittskosten fallen.

Die Durchschnittskosten fallen, bis sich die beiden Kostenkurven schneiden.

Bei hohen Produktionsmengen liegen die Grenzkosten über den Durchschnittskosten, sodass die Durchschnittskosten steigen.

Deshalb müssen die Durchschnittskosten im Betriebsoptimum minimal sein.

-) Die Grenzkostenkurve K' und die Kurve der variablen Durchschnittskosten K^-\_v schneiden einander im Betriebsminimum, d. h. K'(x\_(min)) =K\_v(x\_(min)).

Rechnerische Begründung:

Zur Berechnung des Betriebsminimums setzt man K^-\_v'(x) =0.

K^-\_v'(x) =0 -> K\_v'(x) \*x -K\_v(x) =0

<--> K\_v'(x) =(K\_v(x))/x

<--> K\_v'(x) =K^-'(x) für x =x\_(min)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Betriebswirtschaftliche Begründung:

Bei niedrigen Produktionsmengen liegen die Grenzkosten unter den variablen Durchschnittskosten, sodass die variablen Durchschnittskosten fallen.

Die variablen Durchschnittskosten fallen, bis sich die beiden Kostenkurven schneiden. Bei hohen Produktionsmengen liegen die Grenzkosten über den variablen Durchschnittskosten, sodass die variablen Durchschnittskosten steigen.

Deshalb müssen die variablen Durchschnittskosten im Betriebsminimum minimal sein.

j-156

+++Beispiel 5.22: |A, B|

Terrassenplatten

Die Firma Hundsberger produziert Terrassenplatten.

Die täglichen Kosten für die Produktion der Platte "Travertin" lassen sich durch die Kostenfunktion K beschreiben:

K(x) =3 \*x^3 -11 \*x^2 +22 \*x +4

x Produktionsmenge in ME (1 ME =1000 Stück)

K(x) Kosten in GE bei Produktion von x ME (1 GE =100 €)

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Funktionen K\_v, K^-, K\_v^- und K'.

---

b.)

Ermitteln Sie die Kostenkehre und die minimalen Grenzkosten.

---

c.)

Ermitteln Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

---

d.)

Ermitteln Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

---

e.)

Stellen Sie in einem Diagramm die Graphen von K', K^-, und K\_v^- dar.

---

Lösung:

a.)

variable Kosten:

K(x) =3 \*x^3 -11 \*x^2 +22 \*x

durchschnittliche Gesamtkosten:

K^-(x) =(K(x))/x =3 \*x^2 -11 \*x +22 +4/x

durchschnittliche variable Kosten:

K\_v^-(x) =3 \*x^2 -11 \*x +22

Grenzkosten:

K'(x) =9 \*x^2 -22 \*x +22

---

b.)

Kostenkehre:

K''(x) =18 \*x -22

K''(x) =0 --> 0 =18 \*x -22

x =11/9

Die Kostenkehre liegt bei x\_k =1,2^., also bei ca. 1222 Stück.

Minimale Grenzkosten: K'(11/9) =8,5^. GE/ME, also ca. 0,86 €/Stück.

Bei einer Produktion von 1 222 Stück beträgt der Kostenzuwachs ca. 0,86 € pro zusätzlich produziertem Stück.

---

c.)

Betriebsoptimum:

K'(x) =6 \*x -11 -4/(x^2), für x >0 ist K''(x) =6 +8/(x^3) >0 --> Minimum

K^-'(x) =0 --> 6 \*x^3 -11 \*x^2 -4 =0 kubische Gleichung

Lösung mit Technologie: x\_(opt) =2

Das Betriebsoptimum liegt bei x\_(opt) =2 ME, also 2000 Stück.

K^-(2) =14 GE/ME

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME, also 1,4 €/Stück.

---

d.)

Betriebsminimum:

K'(x) =6 \*x -11

K\_v^-'(x) =0 --> 6 \*x -11 =0

x\_(min) =(11)/6, da K''(x) =6 >0, liegt ein Minimum vor.

Das Betriebsminimum liegt bei x\_(min) =(11)/6 ME, also bei ca. 1833 Stück.

K^-((11)/6) ~~11,9 GE/ME

Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 11,92 GE/ME, also ca. 1,19 €/Stück.

---

e.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

-----

j-157

##### Erstellen ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen

Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F kann erstellt werden

-) durch das Lösen eines Gleichungssystems, wenn vier Bedingungen für die Kostenfunktion angegeben sind.

-) durch kubische Regression, wenn mindestens vier Kostenwerte gegeben sind.

+++Beispiel 5.23: |A, B|

Erstellen einer Kostenfunktion

Die Firma Falken Lacke produziert Farben.

Für die Herstellung der Farbensorte "Castor" fallen monatliche Fixkosten von 200 GE an. Die Kostenkehre liegt bei einer monatlichen Produktion von 10 ME.

Bei dieser Produktionsmenge betragen die Gesamtkosten 520 GE und die Grenzkosten 8 GE/ME.

Die Kosten sollen durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F modelliert werden.

a.)

Erstellen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b, c und F.

---

b.)

Ermitteln Sie die Gleichung dieser ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

---

Lösung:

a.)

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

K''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

1) K(0) =200: F =200

2) K''(10) =0: 6\*a \*10 +2 \*b =0

3) K(10) =520: a \*10^3 +b \*10^2 +c \*10 +F =520

4) K'(10) =8: 3 \*a \*10^2 +2 \*b \*10 +c =8

Gleichungssystem:

F =200

60 \*a +2 \*b =0

1000 \*a +100 \*b +10 \*c +F =520

300 \*a +20 \*b +c =8

---

b.)

Lösung des Gleichungssystems mit Technologie (siehe Randspalte):

a =0,24;

b =-7,2;

c =80;

F =200

Kostenfunktion:

K(x) =0,24 \*x^3 -7,2 \*x^2 +80 \*x +200

{{Grafik: Lösung des Gleichungssystems mit GTR}}

{{Grafik: Lösung mit GeoGebra}}

-----

j-158

+++Beispiel 5.24: |A, B, C, D|

Erstellen einer Kostenfunktion mit Regression

Die Firma Falken Lacke produziert Farben.

Für die Herstellung der Farbensorte "Truecolor" erhält die Firma durch die innerbetriebliche Kostenrechnung folgende Datenpaare:

{{Tabelle aufgelöst}}

x in ME: 0

K(x) in GE: 50

---

x in ME: 1

K(x) in GE: 67

---

x in ME: 2

K(x) in GE: 75

---

x in ME: 4

K(x) in GE: 80

---

x in ME: 5

K(x) in GE: 95

---

x in ME: 6

K(x) in GE: 120

---

x in ME: 67

K(x) in GE: 170

---

a.)

Erstellen Sie eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion, die sich an diese Datenpaare möglichst gut anpasst.

---

b.)

Untersuchen Sie die Funktionsgleichung auf Änderungen durch Runden der Koeffizienten auf Ganze.

---

Lösung:

a.)

Eine möglichst gute Anpassung im Sinne der minimalen Fehlerquadrate erreicht man durch eine Regression.

Geben Sie die Datenpaare in ihr elektronisches Hilfsmittel ein.

Ermitteln Sie die zugehörige kubische Regressionslinie.

{{Grafik: Lösung mit GTR}}

Kubische Kostenfunktion (Regressionslinie) mit der Gleichung

K(x) =1,0733 \*x^3 -8,6892 \*x^2 +25,3591 \*x +49,8265

Lösung mit GeoGebra:

Erstellen Sie in der Ansicht "Tabelle" eine Liste der Datenpaare (siehe Randspalte). Markieren Sie die Daten und erzeugen Sie über das Kontextmenü (rechte Maustaste) eine Liste von Punkten: Erzeuge > Liste von Punkten.

Sie erhalten eine Liste1 mit den Datenpunkten.

Mit der Funktion TrendPoly[Liste1, 3] erhalten Sie die kubische Regressionsfunktion:

{{Grafik: Tabelle, Funktionsgraph und Lösung mit GeoGebra nicht übertragen}}

---

b.)

Das Runden der Koeffizienten, insbesondere der Koeffizienten der höheren Potenzen in der Polynomfunktion, kann den Verlauf der Kostenkurve erheblich beeinflussen. Werden etwa alle Koeffizienten ganzzahlig gerundet, erhält man die Kostenfunktion K mit K(x) =x^3 -9 \*x^2 +25 \*x +50.

Diese ist nicht ertragsgesetzlich, da b^2 =81 >75 =3 \*a \*c.

{{Grafik: Lösung mi Technologie nicht übertragen}}

Die beste Annäherung der Datenpunkte (mit ganzzahlig gerundeten Koeffizienten) ist durch K(x) =x^3 -8 \*x^2 +25 \*x +50 gegeben.

|T|: Kleine Änderungen der Koeffizienten können starke Änderungen des Kostenverlaufs verursachen.

Meist ist nicht die nächste ganze Zahl die beste Annäherung.

-----

j-159

##### Übungsaufgaben

+++5.019 |D|

In der Randspalte sind die Graphen von fünf Funktionen K\_1, K\_2, K\_3, K\_4 und K\_5 dargestellt. Argumentieren Sie, welche dieser Funktionen ertragsgesetzliche Kostenfunktionen sind.

{{Grafik: Funktionsgraphen K\_1 bis K\_5 nicht übertragen}}

**[]**

-----

+++5.020 |D|

Gegeben sind die Graphen a) einer linearen und b) einer kubischen Kostenfunktion K. Erklären Sie, in welchen der eingezeichneten Punkte A, B, C, D und E der Kostenkurve die Durchschnittskosten K^-(x) =(K(x))/x (1) am größten und (2) am kleinsten sind.

{{Die Aufgaben (1) und (2) beziehen sich jeweils auf a.) und auf b.)}}

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph einer linearen Funktion}}

**[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph einer kubischen Funktion}}

**[]**

----

+++5.021 |B|

Ermitteln Sie von der quadratischen Kostenfunktion jeweils das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

a.)

K(x) =0,5 \*x^2 +3 \*x +12,5

**[]**

---

b.)

K(x) =4 \*x^2 +565 \*x +12100

**[]**

-----

Neoklassische Kostenfunktion:

K(x) =a \*x^2 +b \*x +F

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

Es wird vollständige Konkurrenz vorausgesetzt.

---

+++5.022 |B|

Ermitteln Sie von den ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen jeweils (1) die Kostenkehre, (2) das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze sowie (3) das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

a.)

K(x) =x^3 -3 \*x^2 +4 \*x +4

**[]**

---

b.)

K(x) =0,1 \*x^3 -1,5 \*x^2 +9 \*x +15

**[]**

---

c.)

K(x) =0,01 \*x^3 -0,3 \*x^2 +4 \*x +10

**[]**

---

d.)

K(x) =0,01 \*x^3 -0,6 \*x^2 +15 \*x +120

**[]**

-----

+++5.023 |B, D|

Die Kostenkehre einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F ist an der Stelle x =-b/(3 \*a).

a.)

Zeigen Sie dies.

**[]**

---

b.)

Argumentieren Sie, wie sich die Kostenkehre verändert, wenn die Fixkosten steigen.

**[]**

-----

+++5.024 |B, C, D|

Gegeben ist die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit

K(x) =0,1 \*x^3 -2 \*x^2 +15 \*x +6.

a.)

Berechnen Sie die Zunahme der Gesamtkosten K, wenn die Produktionsmenge von 6 ME auf 7 ME steigt.

**[]**

---

b.)

Erklären Sie im Sachzusammenhang, was durch folgende Rechnung ermittelt wird: (K(6,2) -K(6))/(6,2 -6) =45,9528 -45,6)/(6,2 -6) =1,764

**[]**

---

c.)

Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle x =6 im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d.)

Vergleichen Sie die Ergebnisse von b) und c).

Begründen Sie den Unterschied.

**[]**

-----

+++5.025 |C, D|

Von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sind folgende Werte bekannt:

Interpretieren Sie jeweils diese Werte. Ergänzen Sie die Einheiten. Beschreiben und skizzieren Sie den Funktionsverlauf bei x =10. Schätzen Sie die Funktionswerte für x =11 sowie für x =9.

a.)

K(10) =350,

K'(10) =12,

K''(10) =-0,6

**[]**

---

b.)

K(10) =1250,

K'(10) =28,

K''(10) =6

**[]**

---

c.)

K(10) =150,

K'(10) =2,

K''(10) =0

**[]**

-----

j-160

+++5.026 |C, D|

In der Randspalte ist der Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion für ein Produkt dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erklären Sie, was man unter der Kostenkehre versteht.

Lesen Sie deren Wert aus der Grafik ab:

(Geben Sie Maßzahl und Maßeinheit an.)

x\_k =**[]**

---

b.)

Erklären Sie, was man unter Grenzkosten versteht.

Ermitteln Sie näherungsweise aus der Grafik den Wert der Grenzkosten für eine Produktion von 8 ME:

K'(8) =**[]**

Erklären Sie, was dieser Wert bedeutet.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie die Durchschnittskosten bei einer Produktion

von 10 ME:

K^-(10) =**[]**

---

d.)

Erklären Sie, was man unter dem Betriebsoptimum und der langfristigen Preisuntergrenze versteht.

Ermitteln Sie aus der Grafik das Betriebsoptimum:

x\_(opt) =**[]**

Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze:

p\_l =**[]**

-----

+++5.027 |C|

In der Randspalte sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion K^- und der variablen Durchschnittskostenfunktion K\_v^- für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

a.)

Bezeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Diagramm in der Randspalte.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie ab (Achten Sie auf die Einheit).

Kostenkehre: x\_k =**[]**

Betriebsminimum: x\_(min) =**[]**

kurzfristige Preisuntergrenze: p\_k =**[]**

Betriebsoptimum: x\_(opt) =**[]**

langfristige Preisuntergrenze: p\_l =**[]**

-----

+++5.028 |B|

Die Fixkosten für die Herstellung eines Produkts betragen 75 GE.

Werden 10 ME des Produkts erzeugt, betragen die Durchschnittskosten 9 GE/ME und die Grenzkosten 2,5 GE/ME.

Die Kosten können durch eine quadratische Kostenfunktion modelliert werden. Erstellen Sie die Gleichung dieser Kostenfunktion.

**[]**

-----

+++5.029 |B|

Das Betriebsoptimum einer quadratischen Kostenfunktion liegt bei 30 ME. Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.

Die Grenzkosten bei Produktionsstillstand betragen 8 GE/ME.

Erstellen Sie die Gleichung dieser Kostenfunktion.

**[]**

-----

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

K''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

K^-(x) =a \*x^2 +b \*x +c +F/x

---

+++5.030 |A, B|

Für die Herstellung eines Produkts fallen Fixkosten von 20 GE an.

Die Kostenkehre liegt bei 10 ME.

Bei dieser Produktionsmenge betragen die Gesamtkosten 50 GE und die Grenzkosten 2 GE/ME.

Die Kosten sollen durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F modelliert werden.

a.)

Erstellen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b, c und F.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die Gleichung dieser Kostenfunktion.

**[]**

-----

+++5.031 |A, B|

Von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion weiß man:

Die Fixkosten betragen 360000 €. Die Kostenkehre liegt bei 180 ME.

Bei der Erzeugungsmenge von 200 ME betragen die Grenzkosten 1.200 €/ME. Bei einer Produktion von 300 ME sind die Durchschnittskosten minimal. Erstellen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion.

**[]**

-----

j-161

+++5.032 |A, B, C, D|

Von einer Gesamtkostenfunktion K mit K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F kennt A B man folgende Werte:

K(0) =16 GE

K'(0) =8 GE/ME

K^-'(2) =2 GE/ME

K^-(2) =12 GE/ME

a.)

Erklären Sie diese vier Angaben in Worten.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

**[]**

---

e.)

In der Randspalte sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion K^- und der variablen Durchschnittskostenfunktion K\_v^- dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Beschriften Sie die Funktionen.

Markieren Sie das Betriebsoptimum, die langfristige Preisuntergrenze, das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

-----

## !!5.3 Gewinn

### !!5.3.1 Begriffe

Als Gewinn wird die Differenz von Erlös (Einnahmen) und Gesamtkosten (Ausgaben) definiert.

Für marktwirtschaftlich orientierte Unternehmen stellen folgende Fragen:

-) Bei welchen Produktions- und Absatzmengen erzielt das Unternehmen Gewinn? (Ermittlung der Gewinngrenzen)

-) Bei welcher Produktions- und Absatzmenge erzielt das Unternehmen den maximalen Gewinn? Wie hoch ist dieser maximale Gewinn?

Gewinn =Erlös -Kosten

Für ein Monopolunternehmen stellt sich zusätzlich die Frage:

-) Bei welchem Preis erzielt das Unternehmen den maximalen Gewinn? (cournotscher Preis)

Kann ein Betrieb kurzfristig keinen Gewinn erzielen, so ist er bestrebt, zumindest die variablen Kosten durch den Erlös zu decken.

Als Deckungsbeitrag wird die Differenz von Erlös (Einnahmen) und den variablen Kosten definiert.

Deckungsbeitrag =Erlös -variable Kosten

##### Definition: Gewinn und Deckungsbeitrag

||Werden x Mengeneinheiten zu den Kosten K(x) =K\_v(x) +F produziert und mit dem Erlös E(x) abgesetzt, so ist der zugehörige

-) Gewinn: G(x) =E(x) -K(x)

Gewinn =Erlös -Kosten

-) Deckungsbeitrag: D(x) =E(x) -K\_v(x)

Deckungsbetrag =Erlös -variable Kosten\||

---

##### Definition: Grenzgewinn

||Die erste Ableitungsfunktion G' einer Gewinnfunktion G heißt Grenzgewinnfunktion.\||

---

G'(x) =E'(x) -K'(x)

Grenzgewinn =Grenzerlös -Grenzkosten =Änderung des Gewinnes

Ihr Graph heißt Grenzgewinnkurve.

|T|: Die Definition der Grenzgewinnfunktion erfolgt entsprechend zur Definition der Grenzkosten- und der Grenzerlösfunktion.

j-162

Die Grenzgewinnfunktion gibt näherungsweise die Änderung des Gewinns an, die sich durch den Absatz einer weiteren Mengeneinheit ergibt:

G'(x) ~~(G(x\_0 +'De x) -G(x\_0))/('De x) =

für 'De x =1

= (G(x\_0 +1) -G(x\_0))/1 =G(x\_ +1) -G(x\_0)

bzw. G(x\_0 +1) ~~G(x\_0) +G'(x\_0)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

In der wirtschaftlichen Praxis versteht man unter dem Grenzgewinn G'(x) bei einer bestimmten Absatzmenge x den Zuwachs des Gewinns pro zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.

+++Beispiel 5.25: |B, C|

Grenzgewinn

Die Gewinnfunktion für den Absatz eines Produkts ist gegeben durch G(x) =-0,25 \*x^2 +3,5 \*x -6.

a.)

Ermitteln Sie den Grenzgewinn für einen Absatz von x =10 ME.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie diesen Wert.

**[]**

---

Lösung:

a.)

Grenzgewinnfunktion

G'(x) =-0,5 \*x +3,5

G'(10) =-0,5 \*10 +3,5 =-1,5

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

Der Grenzgewinn bei einem Absatz von 10 ME beträgt -1,5 GE/ME. Wird eine weitere ME abgesetzt, sinkt der Gewinn um ca. 1,5 GE.

**[]**

-----

+++Beispiel 5.26: |A, B, C|

Interpretation einer Gewinnfunktion

Von einer Gewinnfunktion sind folgende Werte bekannt:

(1) G(5) =4 GE;

(2) G'(5) =1 GE/ME;

(3) G''(5) =-0,5 GE/ME2

a.)

Interpretieren Sie diese Werte.

---

b.)

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen der Gewinnfunktion bei x =5 ME.

---

c.)

Schätzen Sie den Gewinn für x =6 ME.

-----

Lösung:

a.)

(1) Der Gewinn bei einem Absatz von 5 ME beträgt 4 GE.

(2) Der Grenzgewinn bei einem Absatz von 5 ME beträgt 1 GE/ME, d. h., der Gewinnzuwachs beim Absatz einer weiteren ME beträgt ca. 1 GE.

(3) Der Graph der Gewinnfunktion ist rechtsgekrümmt.

---

b.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

G(6) ~~G(5) +G'(5) =4 +1 =5

Da der Graph der Gewinnfunktion rechtsgekrümmt ist, gilt: G(6) <5, d. h., der Gewinn bei einem Absatz von 6 ME ist etwas kleiner als 5 GE.

-----

##### Gewinngrenzen und Gewinnzone

||-) Die Nullstellen der Gewinnfunktion heißen Gewinngrenzen.

Sie werden durch Lösen der Gleichung G(x) =0 bzw. E(x) =K(x) ermittelt.

Die Gewinngrenzen entsprechen jenen Produktionsmengen, bei denen der Erlös genau die Kosten deckt, da Erlös und Kosten gleich sind.

-) Die untere Gewinngrenze wird auch als Break-even-Point bezeichnet. r Das Intervall zwischen den Nullstellen der Gewinnfunktion mit G(x) >0 heißt Gewinnzone.

Die Gewinnzone ist das offene Intervall ]untere Gewinngrenze; obere Gewinngrenze[.\||

---

j-163

##### Gewinnmaximum

||-) Die Absatzmenge x\_g, für die der Gewinn maximal wird, erhält man durch Lösen der Gleichung G'(x) =0 und Prüfung, ob G''(x\_g) <0.

-) Der maximale Gewinn ist G(x\_g).

-) An der Stelle des maximalen Gewinns x sind der Grenzerlös und die Grenzkosten gleich: E'(x\_g) =K'(x\_g)\||

---

Begründung: aus G'(x\_g) =0 folgt

E'(x\_g) -K'(x\_g) =0, also E'(x\_g) =K'(x\_g)

---

Betriebswirtschaftliche Begründung

-) Ist der Erlös für den Absatz einer weiteren ME (Grenzerlös) höher als die Kosten für eine weitere ME (Grenzkosten), steigt der Gewinn.

-) Der Gewinn ändert sich nicht, wenn der Erlös für den Absatz einer weiteren ME (Grenzerlös) gleich den Kosten für eine weitere ME (Grenzkosten) ist.

-) Ist der Erlös für den Absatz einer weiteren ME (Grenzerlös) kleiner als die Kosten für eine weitere ME (Grenzkosten), sinkt der Gewinn.

### !!5.3.2 Gewinn bei vollständiger Konkurrenz

Bei der Marktform der vollständigen Konkurrenz ist der Marktpreis p konstant.

Als Erlösfunktion erhält man eine lineare Funktion E mit E(x) =p \*x, deren Graph durch den Ursprung geht.

Ein Gewinn ergibt sich nur dann, wenn der Marktpreis höher ist als die langfristige Preisuntergrenze. Dann schneidet der Graph der Erlösfunktion den Graphen der Kostenfunktion.

+++Beispiel 5.27: |A, B, D|

Gewinn bei vollständiger Konkurrenz

Die Firma Bartenstein produziert Lampen.

Die Kosten für die Herstellung einer Deckenlampe lassen sich durch eine kubische Funktion beschreiben:

K(x) =0,1 \*x^3 -2 \*x^2 +15 \*x +20

x produzierte Menge in ME

K(x) Kosten in GE bei x produzierten ME

Die Deckenlampe kann um den Preis p =10 GE/ME verkauft werden.

a.)

Erstellen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.

---

b.)

Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.

---

c.)

Zeigen Sie, dass bei den Gewinngrenzen die Stückkosten gleich dem Preis sind.

---

d.)

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

---

e.)

Zeigen Sie, dass beim Gewinnmaximum der Grenzerlös und die Grenzkosten gleich sind.

---

f.)

Stellen Sie die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Diagramm dar. Markieren Sie die Gewinngrenzen im Diagramm.

Stellen Sie die Graphen der Grenzerlös-, Grenzkosten- und Stückkostenfunktion in einem zweiten Diagramm dar.

---

{{Lösung auf Seite 164}}

j-164

Lösung:

{{Grafik: Lösung mit Hilfe von Technologie nicht übertragen}}

a.)

E(x) =p \*x =10 \*x

G(x) =E(x) -K(x) =10 \*x -(0,1 \*x^3 -2 \*x^2 +15 \*x +20) =-0,1 \*x^3 +2 \*x^2 -5 \*x -20

---

b.)

Gewinngrenzen: Setzen Sie G(x) =0.

0 =-0,1 \*x^3 +2 \*x^2 -5 \*x -20

Mit Technologie:

x\_1 ~~5,95;

x\_2 ~~16,13;

(x3 ~~2,08 \'el D)

Die untere Gewinngrenze liegt bei 5,95 ME, die obere Gewinngrenze liegt bei 16,13 ME.

---

c.)

Für die Gewinngrenzen gilt: G(x) =0

E(x) -K(x) =0

p \*x =K(x) | /x

p =K^-(x)

d. h., bei den Gewinngrenzen sind die Stückkosten gleich dem Preis.

---

d.)

Maximaler Gewinn: Setzen Sie G'(x) =0.

G'(x) =-0,3 \*x^2 +4 \*x -5

0 =-0,3 \*x^2 +4 \*x -5

x\_1 =x\_g ~~11,94

(x\_2 ~~1,4 außerhalb der Gewinnzone)

G''(x) =-0,6 \*x +4

G''(11,94) =-3,16 <0,

d. h., es liegt ein Maximum vor G\_(max) =G(11,94) ~~35,2 GE

---

e.)

Grenzerlös: E'(x) =p =10

Grenzkosten: K'(x) =0,3 \*x^2 -4 \*x +15

K'(11,94) =10

Beim Gewinnmaximum betragen der Grenzerlös und die Grenzkosten 10 GE/ME.

---

f.)

Diagramme:

{{Grafik: Diagramme der Funktionen nicht übertragen}}

j-165

### !!5.3.3 Gewinn bei der Marktform Monopol

Bei der Marktform des Monopols legt das Unternehmen den Preis des Produkts fest.

Die Konsumenten reagieren daraufhin mit einer Änderung der Nachfrage.

Für den Monopolisten ergibt sich eine fallende Preis-Absatz-Funktion p\_N.

Das Monopolunternehmen ist bestrebt, den Preis so festzulegen, dass der Gewinn maximal ist.

Dieser Preis wird als cournotscher Preis bezeichnet zu Ehren des französischen Ökonomen Antoine Cournot, der die Gewinnsituation bei Monopolen als erster untersucht hat.

##### Definition: Cournotsche Menge, cournotscher Preis, cournotscher Punkt

||-) Die Produktionsmenge x\_g eines Monopolbetriebs, bei der der maximale Gewinn erzielt wird, heißt cournotsche Menge.

-) Der Preis p(x\_g), bei dem der maximale Gewinn erzielt wird, heißt cournotscher Preis.

-) Der Punkt C(x\_g|p(x\_g)) auf der Nachfragekurve heißt cournotscher Punkt.\||

---

{{Grafik: Antoine Augustin Cournot, 1801 bis 1877, franz. Volkswirtschafter, Mathematiker und Philosoph, Begründer der mathematischen Schule der Nationalökonomie}}

+++Beispiel 5.28: |A, B, D|

Gewinn bei einem Monopol

Die Firma Bartenstein ist Monopolist für eine Speziallampe.

Die Kosten für die Herstellung dieser Speziallampe lassen sich durch eine kubische Funktion beschreiben: K(x) =0,1 \*x^3 -2 \*x^2 +15 \*x +20

x produzierte Menge in ME

K(x) Kosten in GE bei x produzierten ME

Für die Preis-Absatz-Funktion p\_N erhält man: p\_N(x) =-1,5 \*x +25

a.)

Erstellen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.

---

b.)

Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.

---

c.)

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

---

d.)

Ermitteln Sie den cournotschen Preis und den cournotschen Punkt.

---

e.)

Zeigen Sie, dass beim Gewinnmaximum der Grenzerlös und die Grenzkosten gleich sind.

---

f.)

Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

---

g.)

Stellen Sie die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion sowie die Preis-Absatz-Funktion in einem Diagramm dar.

Stellen Sie die Graphen der Grenzerlös-, Grenzkosten- und Stückkostenfunktion sowie die Preis-Absatz-Funktion in einem zweiten Diagramm dar.

Markieren Sie jeweils den cournotschen Punkt.

---

Lösung auf Seite 165 und 166

Lösung:

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

a.)

E(x) =p\_N(x) \*x =(-1,5 \*x +25) \*x =-1,5 \*x^2 +25 \*x

G(x) =E(x) -K(x) =(-1,5 \*x^2 +25 \*x) -(0,1 \*x^3 -2 \*x^2 +15 \*x +20) =-0,1 \*x^3 +0,5 \*x^2 +10 \*x -20

---

b.)

Gewinngrenzen: Setzen Sie G(x) =0.

0 =-0,1 \*x^3 +0,5 \*x^2 +10 \*x -20 kubische Gleichung

Mit Technologie:

x\_1 ~~1,9;

x\_2 ~~11,96;

(x\_3 =-8,85 \'el D)

Die untere Gewinngrenze liegt bei 1,9 ME, die obere Gewinngrenze liegt bei 11,96 ME.

---

c.)

Maximaler Gewinn: Setzen Sie G'(x) =0.

G'(x) =-0,3 \*x^2 +x +10

0 =-0,3 \*x^2 +x +10 quadratische Gleichung

x\_1 =x\_g ~~7,676

(x\_2 ~~-4,34 \'el D)

G''(x) =-0,6 \*x

G''(7,676) ~~-4,6 <0,

d. h., es liegt ein Maximum vor.

G\_(max) =G(7,676) ~~40,99 GE

---

Gewinngrenzen: G(x\_1) =G(x\_2) =0

Maximaler Gewinn: G'(x\_g) =0

j-166

Cournotscher Punkt: C(x\_g|p(x\_g))

Gewinnmaximierungsprinzip: K'(x\_g) =E'(x\_g)

Maximaler Erlös: E'(x\_E) =0

d.)

Cournotscher Preis: p(7,676) =-1,5 \*7,676 +25 =13,486

Der cournotsche Preis beträgt 13,486 GE/ME.

Cournotscher Punkt: C(7,676|13,486)

---

e.)

Grenzkosten:

K'(x) =0,3 \*x^2 -4 \*x +15

K'(7,676) ~~1,972

Grenzerlös:

E'(x) =-3 \*x +25

E'(7,676) ~~1,972

Beim Gewinnmaximum betragen der Grenzerlös und die Grenzkosten 1,972 GE/ME.

---

f.)

Maximaler Erlös: Setzen Sie E'(x) =0.

E'(x) =-3 \*x +25

0 =-3 \*x +25

x =x\_E ~~8,33, d. h., die erlösmaximierende Menge beträgt 8,33 ME.

E\_(max) =E(8,33) ~~104,17, d. h., der maximale Erlös beträgt 104,17 GE.

g.)

Diagramme:

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

-----

+++Beispiel 5.29: |A, B|

Monopol-Gewinn mit GTR und GeoGebra

Ein Monopolbetrieb modelliert für eines seiner Produkte eine Kostenfunktion dritten Grades.

Die Kostenrechnungsabteilung ermittelt einige Werte.

(siehe Tabelle in der Randspalte)

{{Tabelle aufgelöst}}

x in ME: 2

K(x) in GE: 1490

---

x in ME: 5

K(x) in GE: 1540

---

x in ME: 10

K(x) in GE: 1600

---

x in ME: 11

K(x) in GE: 1616

---

x in ME: 20

K(x) in GE: 1950

---

x in ME: 25

K(x) in GE: 2400

---

a.)

Modellieren Sie die Kostenfunktion mit kubischer Regression.

Die Gleichung der Nachfragefunktion für das Produkt lautet:

p(x) =300 -3 \*x

---

b.)

Erstellen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.

---

c.)

Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.

---

d.)

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

---

{{Lösung auf Seite 167}}

j-167

Lösung mit GTR:

{{Grafik: Bilder zur Lösung mit GTR (Technologie) wurden nicht übertragen}}

a.)

Geben Sie mit der Tastenkombination STAT;EDIT;1:Edit ENTER die Tabellenwerte in die Listen L\_1 und L\_2 ein. Ermitteln Sie mit CubicReg L\_1,L\_2,Y\_1 (STAT;CALC;6:CubicReg) die kubische Kostenfunktion.

Sie erhalten näherungsweise:

K(x) =0,1091 \*x^3 -2,3176 \*x^2 +28,05 \*x +1442,8

---

b.)

Geben Sie in Y\_2 die Erlösfunktion E(x) =(300 -3 \*x) \*x und in Y\_3 die Gewinnfunktion G(x) =E(x) -K(x) =Y\_2 -Y\_1 ein.

---

c.)

Die Gewinngrenzen erhalten Sie, indem Sie mit dem Befehl 2nd [CALC];2:zero

Untere Gewinngrenze: 5,45 ME Obere Gewinngrenze: 43,78 ME

---

d.)

Den maximalen Gewinn erhalten Sie, indem Sie in der Grafik mit dem Befehl 2nd [CALC];4:maximum das Maximum der Gewinnfunktion ermitteln.

Der maximale Gewinn ergibt sich bei der Menge x\_g ~~26,8 ME und beträgt G\_(max) ~~3255 GE.

---

Lösung mit GeoGebra:

{{Grafik: Bilder zur Lösung mit GeoGebra (Technologie) wurden nicht übertragen}}

a.)

Geben Sie die Werte in der Ansicht Tabelle ein.

Markieren Sie die Werte und erzeugen Sie über das Kontextmenü eine Liste von Punkten: Erzeuge > Liste von Punkten (Liste1 wird erzeugt)

Ermitteln Sie die kubische Kostenfunktion mit der Regressionsfunktion TrendPoly:

{{Grafik: Eingabe: [K(x)=TrendPoly[Liste1, 3]}}

(Mit K(x) =Funktion[TrendPoly[Liste1,3],0,100] können Sie den Definitionsbereich für K auf das Intervall [0; 100] festlegen.)

---

b.)

Benennen Sie den Punkt E in E1 um. Nun können Sie die Erlösfunktion E für den Definitionsbereich [0; 100] definieren:

{{Grafik: Eingabe: E(x) =Funktion[(300 -3x)\*x,0,100]}}

Sie erhalten die Gewinnfunktion mit G(x) =E(x) -K(x):

{{Grafik: Eingabe: G(x) =E(x) -K(x)}}

---

c.)

Die Gewinngrenzen erhalten Sie mit dem Befehl Nullstelle:

{{Grafik: Eingabe: N\_1 =Nullstelle[G, 0, 10]}}

N\_1(5,44|0), d. h. die untere Gewinngrenze liegt bei 5,44 ME.

{{Grafik: Eingabe: N\_2 =Nullstelle[G,40,45]}}

N\_2(43,78|0), d. h. die obere Gewinngrenze liegt bei 43,78 ME.

---

d.)

Den maximalen Gewinn erhalten Sie mit dem Befehl Extremum:

{{Grafik: Eingabe: G{max} =Extremum[G, 20,30]}}

G\_(max)(26,82|3255,4), d. h. der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 26,82 ME erzielt und beträgt 3255,4 GE.

-----

j-168

##### Übungsaufgaben

+++5.033 |A, B, C|

Von einer Erlös- oder Gewinnfunktion weiß man folgende Werte:

Interpretieren Sie diese Werte, ergänzen Sie die Einheiten, beschreiben und skizzieren Sie den Funktionsverlauf bei x =10.

Schätzen Sie die Funktionswerte für x =11 sowie für x =9.

a.)

E(10) =240,

E'(10) =-2,

E''(10) =-1

**[]**

---

b.)

G(10) =4,

G'(10) =-2,

G''(10) =-2

**[]**

---

c.)

G(10) =-10,

G'(10) =5,

G''(10) =1

**[]**

---

d.)

E(10) =180,

E'(10) =0,

E''(10) =-1

**[]**

-----

Zu einer Gewinnfunktion G ist G' die zugehörige Grenzgewinnfunktion.

+++5.034 |C|

Im Diagramm ist der Graph einer Gewinnfunktion dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Lesen Sie den Grenzgewinn ab bei einem Absatz von:

a.)

2 ME

**[]**

---

b.)

4 ME

**[]**

---

c.)

6 ME

**[]**

-----

Erlösfunktion: E(x) =p \*x

Gewinnfunktion: G(x) =E(x) -K(x)

---

+++5.035 |A, B|

Ein Betrieb stellt ein Produkt her. Gegeben sind die Gesamtkostenfunktion K und der konstante Marktpreis p bei vollständiger Konkurrenz.

Erstellen Sie die Gewinnfunktion.

Ermitteln Sie jeweils die Gewinngrenzen und den maximalen Gewinn.

Runden Sie auf 3 Kommastellen.

a.)

K(x) =x^2 +5 \*x +4

p =11 GE/ME

**[]**

---

b.)

K(x) =0,3 \*x^2 +11,1 \*x +7,375

p =16 GE/ME

**[]**

---

c.)

K(x) =0,01 \*x^3 -0,45 \*x^2 +9 \*x +100

p =10 GE/ME

**[]**

---

d.)

K(x) =1 \*x^3 -1,55 \*x^2 +5 \*x +2

p =2 GE/ME

**[]**

-----

+++5.036 |B, C|

Im Diagramm in der Randspalte ist der Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Das Produkt kann um den Preis p =100 GE/ME verkauft werden.

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im Diagramm ein.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die Gewinngrenzen ab.

**[]**

---

c.)

Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion ein.

**[]**

---

d.)

Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

**[]**

-----

+++5.037 |A, B, D|

Die Kosten für die Herstellung eines Produkts lassen sich durch die Funktion K mit K(x) =0,05 \*x^2 +0,2 \*x +1 beschreiben.

Das Produkt kann um den Preis p =0,75 GE/ME verkauft werden.

a.)

Erstellen Sie die Gewinnfunktion.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

**[]**

---

c.)

Zeigen Sie durch Berechnung, dass bei der gewinnmaximalen Menge die Grenzkosten gleich dem Preis sind.

**[]**

---

d.)

Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für die Marktform der vollständigen Konkurrenz gilt: Bei der gewinnmaximalen Menge sind die Grenzkosten gleich dem Preis.

**[]**

-----

+++5.038 |C, D|

In der Randspalte sind zwei Diagramme abgebildet.

{{Grafik: Diagramme mit Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Im oberen Diagramm sind die Graphen der Kostenfunktion K, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G für ein Produkt dargestellt.

Im unteren Diagramm sind die Graphen der Durchschnittskostenfunktion K^-, der Grenzfunktion K' und des Preises p dargestellt.

a.)

Bezeichnen Sie die Funktionsgraphen.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie ab (Zahlenwert und Einheit (ME, GE, GE/ME)). Erklären Sie jeweils die Bedeutung des Begriffs:

Betriebsoptimum:

x\_(opt) =**[]**

Langfristige Preisuntergrenze:

p\_l =**[]**

Preis:

p =**[]**

Gewinngrenzen:

x\_1 =**[]**

x\_2 =**[]**

Menge des maximalen Gewinns:

x\_g =**[]**

Maximaler Gewinn:

G\_(max) =**[]**

Grenzkosten im Gewinnmaximum:

K'(x\_g) =**[]**

-----

j-169

Monopol ein Anbieter, viele Nachfrager

Die Nachfrage ist abhängig vom Preis, die Preisfunktion der Nachfrage ist fallend.

Deckungsbeitragsfunktion:

D(x) =E(x) -K\_v(x)

Gewinnfunktion:

G(x) =E(x) -K(x)

Zusammenhang zwischen Deckungsbeitrags- und Gewinnfunktion:

G(x) =D(x) -F

Lineare Preisfunktion:

p\_N(x) =a \*x +b

Quadratische Kostenfunktion:

K(x) =a \*x^2 +b \*x +F

Cournotscher Punkt: C(x\_g|p(x\_g))

x\_g ist die Menge, bei der der Gewinn maximal wird.

---

+++5.039 |A, B|

Für ein Produkt eines Monopolbetriebs sind die Kostenfunktion K und die Preisfunktion der Nachfrage p\_N gegeben. Erstellen Sie die Gewinnfunktion.

Ermitteln Sie jeweils die Gewinngrenzen, den maximalen Gewinn und den cournotschen Punkt.

a.)

K(x) =0,1 \*x^2 +2 \*x +10

p\_N(x) =8 -0,2 \*x

**[]**

---

b.)

K(x) =3 \*x +8

P\_N(x) =(4 -x/2)^2

**[]**

---

c.)

K(x) =x^2 +4 \*x +10

p\_N(x) =(5 -x/2)^2

**[]**

---

d.)

K(x) =0,1 \*x^3 -1,5 \*x^2 +10 \*x +30

p\_N(x) =24 -2 \*x

**[]**

-----

+++5.040 |A, B, D|

Ein Monopolbetrieb stellt ein Produkt her.

Die Gleichung der variablen Gesamtkostenfunktion K\_v lautet:

K\_v(x) =1/(15) \*x^3 -4/5 \*x^2 +(17)/5 \*x.

Die fixen Kosten betragen 2 GE.

Die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p\_N lautet:

p\_N(x) =-1/5 \*x +3

a.)

Erstellen Sie die Erlös-, die Deckungsbeitrags- und die Gewinnfunktion.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den maximalen Erlös, den maximalen Deckungsbeitrag und den maximalen Gewinn.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, warum der maximale Gewinn und der maximale Deckungsbeitrag bei derselben Absatzmenge liegen.

**[]**

-----

+++5.041 |A, B|

Ein Monopolbetrieb erkennt durch Marktforschung, dass die Nachfrage für eines seiner Erzeugnisse durch eine lineare Funktion modelliert werden kann.

Bei einem Verkaufspreis von 170 GE/ME ist die Absatzmenge 8 ME, bei einem Preis von 50 GE/ME werden 20 ME verkauft.

{{Tabelle aufgelöst}}

x in ME: 8

p in GE/ME: 170

---

x in ME: 20

p in GE/ME: 50

---

a.)

Erstellen Sie die Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Verkaufspreis, bei dem der Erlös maximal wird. Weiters ist bekannt:

Die Fixkosten des Betriebs betragen 480 GE.

Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktion von 12 ME.

Die minimalen Stückkosten betragen 130 GE/ME.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie die quadratische Kostenfunktion.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie den cournotschen Punkt.

**[]**

-----

+++5.042 |A, B, C|

Im Diagramm in der Randspalte sind die Graphen einer Stückkostenfunktion K und einer Preisfunktion der Nachfrage p\_N dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die Gewinngrenzen ab.

**[]**

---

c.)

Die Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch K'(x) =0,1 \*x +1. Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion im Diagramm ein.

**[]**

---

d.)

Lesen Sie das Betriebsoptimum aus dem Diagramm ab.

**[]**

-----

j-170

+++5.043 |A, B|

Ein Buchverlag stellt fest, dass bei einem Stückpreis von 15 Euro pro Monat 1000 Stück eines Buchs abgesetzt werden können.

Senkt der Verlag den Preis auf 14 Euro pro Stück, können weitere 50 Stück des Buches pro Monat verkauft werden.

Bei jeder weiteren Preissenkung um 1 Euro erhöht sich die Absatzmenge um jeweils 50 Stück.

{{Tabelle aufgelöst}}

Absatzmenge x: 1000

Verkaufspreis p(x): 15,00 €

---

Absatzmenge x: 1050

Verkaufspreis p(x): 45,00 €

---

a.)

Erstellen Sie die Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie den Verkaufspreis und die Absatzmenge, bei dem der Erlös maximal ist.

Die variablen Stückkosten für die Herstellung des Buches betragen 5 Euro. Die monatlichen Fixkosten betragen 4000 Euro.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie die lineare Kostenfunktion und die Gewinnfunktion.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie den Verkaufspreis, bei dem der maximale Gewinn erzielt wird.

**[]**

-----

+++5.044 |A, B|

Ein selbstständiger amerikanischer Taxifahrer befördert Personen von einem Vorort ins Stadtzentrum.

Erfahrungsgemäß hängt die Anzahl x der täglichen Fahrten vom geforderten Fahrpreis p ab (siehe Tabelle in der Randspalte).

{{Tabelle aufgelöst}}

Fahrten pro Tag: 28

Fahrpreis p in $: 2,00

---

Fahrten pro Tag: 19

Fahrpreis p in $: 4,00

---

Fahrten pro Tag: 12

Fahrpreis p in $: 6,00

---

Fahrten pro Tag: 5

Fahrpreis p in $: 8,00

---

a.)

Ermitteln Sie die Preisfunktion der Nachfrage mithilfe der quadratischen Regression.

Lesen Sie den Höchstpreis ab, bei dem niemand mehr das Taxi benutzen wird.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Anzahl der täglichen Fahrten, für die der Erlös maximal wird, sowie den zugehörigen Fahrpreis.

**[]**

---

c.)

Der Taxifahrer hat tägliche Fixkosten von 14,00 $.

Die zugehörigen Treibstoffkosten pro Fahrt betragen 1,20 $.

Weitere Kosten werden nicht berücksichtigt.

Erstellen Sie die Gleichung der linearen Kostenfunktion.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie jene Fahrtenanzahl pro Tag, bei der der Taxifahrer seinen größten Gewinn erzielt.

Der Taxifahrer rechnet mit 25 Arbeitstagen pro Monat.

Berechnen Sie den maximalen monatlichen Bruttoverdienst.

**[]**

-----

##### Ziele erreicht?

+++Z 5.1 |A, B, C, D|

In untenstehendem Diagramm ist der Graph der Preisfunktion des Angebots p\_A eines Produkts dargestellt.

Es ist bekannt, dass der Höchstpreis für dieses Produkt 5,5 GE/ME beträgt und der Markt bei x\_S =10 ME gesättigt ist.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Zeichnen Sie den Graphen der passenden linearen Preisfunktion der Nachfrage in das Diagramm ein.

**[]**

b.)

Lesen Sie den Marktpreis ab.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, wie man den Marktpreis rechnerisch bestimmt.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der linearen Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie die Bogenelastizität für eine Preissenkung von 3,3 GE/ME auf 2,2 GE/ME. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

**[]**

---

f.)

Berechnen Sie die Punktelastizität der Nachfrage für den Preis 2,2 GE/ME. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

**[]**

---

g.)

Bei einem Verkaufspreis von 2,75 GE/ME beträgt die Elastizität der Nachfrage -1.

Erklären Sie die Bedeutung dieses Verkaufspreises für die Erlösfunktion.

**[]**

-----

j-171

+++Z 5.2 |B, C, D|

Im untenstehenden Diagramm sind die Graphen einer Erlösfunktion und einer Kostenfunktion dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

a.)

Kreuzen Sie jene Abbildung in der Randspalte an, die den Graphen der zur Erlösfunktion passenden Preisfunktion der Nachfrage zeigt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

{{Grafik: Funktionsgraphen zum Ankreuzen nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

Lesen Sie den Grenzerlös für den Absatz von 30 ME ab.

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

**[]**

---

c.)

Lesen Sie die Gewinngrenzen ab.

**[]**

---

d.)

Skizzieren Sie die Gewinnfunktion im Diagramm.

**[]**

---

e.)

Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

**[]**

-----

+++Z 5.3 |A, B, C, D|

In der Abbildung ist der Graph einer Kostenfunktion dargestellt.

a.)

Ermitteln Sie grafisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

**[]**

---

b.)

Die Gleichung der Kostenfunktion lautet:

K(x) =0,01 \*x^3 -0,5 \*x^2 +10 \*x +100

Berechnen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie den Unterschied zwischen Betriebsoptimum und Betriebsminimum.

**[]**

-----

j-172

+++Z 5.4 |A, B|

Eine Kostenfunktion dritten Grades hat bei x =39 ME die Kostenkehre, bei x =10 ME betragen die Durchschnittskosten 32 GE/ME und bei 70 ME sind die Grenzkosten 10 GE/ME.

Es fallen Fixkosten von 200 GE an.

a.)

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Gleichung der Kostenfunktion.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die Gleichung der Kostenfunktion.

**[]**

-----

+++Z 5.5 |C|

Kreuzen Sie jene Aussagen an, die für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion C zutreffen:

**[]**: Die Grenzkostenkurve und die Durchschnittskostenkurve schneiden einander im Betriebsoptimum.

**[]**: Die Grenzkostenkurve und die Durchschnittskostenkurve schneiden einander in der Kostenkehre.

**[]**: Der Graph der variablen Kostenfunktion verläuft durch den Koordinatenursprung.

**[]**: Die Grenzkostenkurve und die variable Durchschnittskostenfunktion schneiden einander im Betriebsminimum.

**[]**: Die Grenzkosten sind in der Kostenkehre am größten.

-----

+++Z 5.6 |A, B, C|

Ein Monopolbetrieb modelliert für eines seiner Produkte die Kostenfunktion mit K(x) =x^3 -54 \*x^2 +2054 \*x +10240.

Eine Markterhebung ergab das in der Tabelle festgehaltene Nachfrageverhalten für das Produkt.

{{Tabelle aufgelöst}}

x in ME: 20

p\_N(x) in GE/ME: 3700

---

x in ME: 50

p\_N(x) in GE/ME: 2540

---

x in ME: 70

p\_N(x) in GE/ME: 1700

---

x in ME: 95

p\_N(x) in GE/ME: 750

---

x in ME: 105

p\_N(x) in GE/ME: 300

---

a.)

Lesen Sie aus der Funktionsgleichung die Höhe der Fixkosten ab.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Kostenkehre und beschreiben Sie den Verlauf der Kostenfunktion.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie mithilfe linearer Regression die Preisfunktion der Nachfrage p\_N.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie die Koordinaten des cournotschen Punktes und die Höhe des maximalen Gewinns.

**[]**

-----

+++Z 5.7 |C|

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an:

**[]**: Bei vollständiger Konkurrenz ist die Erlösfunktion linear.

**[]**: An der Stelle des maximalen Gewinns sind die Grenzkosten und die Durchschnittskosten gleich groß.

**[]**: Für die cournotsche Menge sind die Grenzkosten gleich groß wie der Grenzerlös.

**[]**: Die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion nehmen jeweils nur positive Funktionswerte an.

**[]**: Die Gewinnzone liegt zwischen den Schnittstellen der Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion.

-----

j-173

# !!6 Integralrechnung

Die Integralrechnung ist aus dem Bedürfnis heraus entstanden, den Inhalt von Flächen zu berechnen, die von krummen Linien begrenzt werden. Man denke etwa an die Vermessung von Feldern. So sind auch aus den ältesten Kulturen, aus Ägypten, Babylon, China, solche Rechnungen bekannt. In Griechenland verwendete Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) auf besonders geniale Weise die geometrische Größenlehre zur Lösung von Integrationsproblemen. So berechnete er etwa die Fläche eines Parabelsegments. Diese Spitzenleistung hellenistischer Mathematik ist über tausend Jahre nicht übertroffen worden. Vielfach wurde sie auch nicht verstanden.

Die Begegnung mit dem antiken Wissen in der Renaissance brachte auch neue Erkenntnisse auf dem Gebiet der Integralrechnung, etwa durch François Vieta (1540 bis 1603), der einfache Grenzübergänge verwendete. Galileo Galilei (1564 bis 1642), aus physikalischen Gründen an infinitesimalen Methoden interessiert, veranlasste seinen Schüler Bonaventura Cavalieri (ca. 1598 bis 1647) zu einer Zusammenfassung der bisherigen Erkenntnisse auf diesem Gebiet.

Johannes Kepler (1571 bis 1630) hat mit seiner nach ihm benannten Fassregel das Volumen von Drehkörpern, insbesondere von Weinfässern, näherungsweise berechnet.

Im 17. Jh. erkannte der englische Mathematiker Isaac Barrow (1630 bis 1677), der akademische Lehrer Newtons, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differenzialrechnung ist. Den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung publizierte als erster 1667 James Gregory (1638 bis 1675). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) verwendete 1675 zum erstenmal das Integralzeichen 'int als stilisiertes S für Summe. Er schreibt: "Es wird nützlich sein, statt der Gesamtheiten von Cavalieri -also statt Summe aller x - von nun an 'int(x 'dx) zu schreiben."

Eine von der Differenzialrechnung unabhängige Begründung der Integralrechnung ist das Verdienst von Bernhard Riemann (1826 bis 1866). Das "riemannsche Integral" als Grenzwert von Ober- und Untersummen wurde zum festen Bestandteil der reellen Funktionen und der Mengenlehre, die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts schnell entwickelte.

Erst um 1880 ging die Mathematik in der Beantwortung der Frage nach dem Maß beliebig beschränkter Punktmengen weiter. Im Jahre 1900 erweiterte Henry Lebesgue (1875 bis 1941) mit seinem Werk zur Maßtheorie den Integralbegriff von Riemann.

{{Grafik: Johannes Kepler, 1571 bis 1630, deutscher Mathematiker und Astronom}}

{{Grafik: Bernhard Riemann, 1826 bis 1866, deutscher Mathematiker}}

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) den Begriff der Stammfunktion sowie den Zusammenhang zwischen Funktion, Stammfunktion und ihrer grafischen Darstellung beschreiben,

-) den Begriff des unbestimmten Integrals und den Zusammenhang mit der Stammfunktion beschreiben,

-) Stammfunktionen von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen mithilfe der notwendigen Integrationsregeln berechnen,

-) den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffs erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben,

-) das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt deuten und damit Berechnungen durchführen,

-) die Integralrechnung auf wirtschaftliche Anwendungen, insbesondere auf Stammfunktionen von Grenzfunktionen und kontinuierliche Zahlungsströme anwenden, Berechnungen durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren,

-) eine Größe als Integral ihrer Änderungsrate bzw. Ableitung interpretieren.\||

---

j-174

##### Worum geht's hier?

Im vorigen Kapitel haben Sie die Grenzkosten von Kostenfunktionen, den Grenzerlös von Erlösfunktionen und den Grenzgewinn von Gewinnfunktionen berechnet.

Es stellt sich die Frage: Wie kann man von der Grenzfunktion auf die Funktion zurückrechnen?

Die allgemeine Frage lautet: Wie kann man von einer gegebenen Ableitungsfunktion f' auf die Funktion f, die sogenannte Stammfunktion, zurückrechnen?

Diesen Rechenvorgang nennt man Integrieren. Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

integrare: lateinisch für wiederherstellen

Eine Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch K'(x) =0,06 \*x^2 -0,6 \*x +3.

Ermitteln Sie die zugehörige Gesamtkostenfunktion K.

Gesucht ist eine Kostenfunktion K, deren Ableitung K' ist.

Die Ableitung von (x^3)/3 ist x^2, damit ist (x^3)/3 die Stammfunktion von x^2.

Die Ableitung von (x^2)/2 ist x, damit ist (x^2)/2 die Stammfunktion von x.

Die Ableitung von 3 \*x ist 3, damit ist 3 \*x die Stammfunktion von 3.

Insgesamt erhält man als Kostenfunktion:

K(x) =0,06 \*(x^3)/3 -0,6 \*(x^2)/2 +3 \*x =0,02 \*x^3 -0,3 \*x^2 +3 \*x

Nun fehlen bei der Kostenfunktion K noch die Fixkosten. Diese fallen beim Differenzieren weg und können nicht mehr aus der Ableitungsfunktion K' rekonstruiert werden. Jede (positive) reelle Zahl könnte den Fixkosten entsprechen.

Schreibweise:

K(x) ='int(K'(x) 'dx) ='int((0,06 \*x^2 -0,6 \*x +3) 'dx) =0,06 \*(x^3)/3 -0,6 \*(x^2)/2 +3 \*x +C

wobei C eine beliebige Konstante ist.

sprich: "K von x ist das Integral über K'(x) 'dx"

Eine Grenzerlösfunktion E' ist gegeben durch E'(x) =5.

Ermitteln Sie die zugehörige Erlösfunktion E.

E(x) ='int(5 'dx) =5 \*x

Für jede Erlösfunktion gilt: E(0) =0

Deshalb gilt für die Konstante C für jede Erlösfunktion: C =0

Kann die Stammfunktion geometrisch gedeutet werden?

E'(x) =5 ist eine konstante Funktion.

E(x) =5 \*x ist eine lineare Funktion.

Für die Absatzmenge x =8 ME erhält man etwa E(8) =5 \*8 =40 GE.

Der Wert 40 entspricht der Maßzahl des Flächeninhalts jenes Rechtecks, das von der Grenzerlöskurve und der x-Achse zwischen x =0 und x =8 begrenzt wird.

{{Grafik: nicht übertragen}}

## !!6.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

##### Definition: Stammfunktion

||Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt: F' =f

Das Berechnen der Stammfunktion nennt man Integrieren.

Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

Zu einer gegebenen Funktion f sucht man eine Stammfunktion F, die abgeleitet f ergibt.\||

---

j-175

+++Beispiel 6.1: |B|

Stammfunktion

Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f mit f(x) =x^2.

Lösung:

Welche Funktion F ergibt abgeleitet x^2?

Es gilt: (x^3)' =3 \*x^2, F mit F(x) =(x^3)/3 ist eine Stammfunktion von f, da ((x^3)/3)' =x^2.

Beachten Sie:

Auch (x^3)/3 +1; (x^3)/3 +C (C 'el 'R) sind Stammfunktionen von f.

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

-----

Ist F Stammfunktion von f, so ist auch F +C mit C 'el 'R eine Stammfunktion.

Alle Stammfunktionen unterscheiden sich ausschließlich durch einen konstanten Summanden.

Begründung: Ein konstanter Summand ergibt differenziert den Wert 0.

(F(x) +C)' =F'(x) =f(x)

##### Definition: Unbestimmtes Integral

||Ist F eine Stammfunktion von f, dann heißt 'int(f(x) 'dx) =F(x) +C unbestimmtes Integral.

C heißt Integrationskonstante.\||

---

##### Differenzieren und Integrieren sind inverse Operationen

||-) Ist F(x) gegeben und F'(x) =f(x) gesucht, muss man F differenzieren. r

-) Ist F'(x) =f(x) gegeben und F(x) gesucht, muss man f integrieren.

-) Differenzieren ist eindeutig.

-) Integrieren ist nicht eindeutig. Für das unbestimmte Integral muss die Integrationskonstante berücksichtigt werden.\||

Es gibt unendlich viele Stammfunktionen von f.

Sie unterscheiden sich durch eine additive Integrationskonstante C.

Häufig wird nur jene Stammfunktion angeschrieben, für die der Wert C =0 ist.

+++Beispiel 6.2: |B|

Differenzieren und Integrieren

Ergänzen Sie die Tabelle:

{{Tabelle aufgelöst}}

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: x^2

F'(x) =f(x): 2x

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: (x^2)/2

F'(x) =f(x): x

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: **[]**

F'(x) =f(x): x^2

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: 2x -1

F'(x) =f(x): **[]**

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: **[]**

F'(x) =f(x): 2x -1

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: 'ln(x)

F'(x) =f(x): **[]**

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: **[]**

F'(x) =f(x): 'e^x

---

F(x) ='int(f(x) 'dx) eine Stammfunktion: 'e^(2x)

F'(x) =f(x): **[]**

-----

+++Beispiel 6.3: |A, B|

Grafische Darstellung der Stammfunktion

Ermitteln Sie die Stammfunktionen zu f mit f(x) =2 \*x und stellen Sie diese grafisch dar.

Lösung:

Zu der Funktion f mit f(x) =2 \*x gehören unendlich viele Stammfunktionen, nämlich alle mit F(x) =x^2 +C.

Die Graphen der Stammfunktionenschar (siehe Randspalte) gehen alle aus der Parabel mit F(x) =x^2 durch Verschiebung in der y-Richtung hervor.

Alle Kurven der Schar haben an einer festen Stelle x\_0 denselben Anstieg:

F'(x\_0) =f(x\_0) =2 \*x\_0.

Die Konstante C wird durch Differenzieren 0. Man kann somit durch den Integranden jeder Stelle genau eine Tangentensteigung zuordnen.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Alle Graphen der Kurvenschar sind Stammfunktionen von f mit f(x) =2 \*x.

-----

j-176

Die Stammfunktion wird eindeutig, wenn für die Stammfunktion eine Bedingung, etwa ein Punkt auf dem Graphen, vorgegeben wird.

+++Beispiel 6.4: |B|

Bestimmung einer Stammfunktion

Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion F zu f mit f(x) =2 \*x, deren Graph durch den Punkt P(3|1) geht.

Lösung:

Eine Stammfunktion: F(x) ='int(2 \*x 'dx) =x^2

Alle Stammfunktionen: F(x) +C ='int(2 \*x 'dx) +C =x2 +C

Gesuchte Stammfunktion: F(3) =1 --> 9 +C =1 <--> C =-8, d. h. F(x) =x^2 -8

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Nur die Stammfunktion F mit F(x) =x^2 -8 geht durch den Punkt P(3|1).

-----

##### Grundintegrale

Die wichtigste Aufgabe der Integralrechnung ist es, Stammfunktionen zu berechnen. Da für jede Stammfunktion F die Beziehung F'(x) =f(x) gilt, können durch umgekehrte Anwendung der Differenziationsformeln zahlreiche Arten von Stammfunktionen ermittelt werden.

##### Definition: Grundintegrale

||Stammfunktionen, die man durch Umkehranwendung der Differenziationsformeln erhält, heißen Grundintegrale.\||

---

|T|: Man sagt:

Differenzieren ist ein Handwerk, das Integrieren ist eine Kunst.

Dabei erweist sich das Integrieren als schwieriger und trickreicher als das Differenzieren. Auch ist zu beachten, dass nicht jede elementare Funktion eine Stammfunktion besitzt.

So haben etwa die Glockenkurve f(x) ='e^(-(x^2)/2) oder die Funktion f(x) =1/('ln(x)) keine Stammfunktion.

---

|T|: Um das Differenzieren rückgängig zu machen, muss

-) die Hochzahl um eins erhöht und

-) durch diese neue Hochzahl dividiert werden.

---

+++Beispiel 6.5: |B, D|

Stammfunktionen von Potenzfunktionen

Ermitteln Sie die Stammfunktionen der Potenzfunktionen und begründen Sie.

Potenzfunktion f eine Stammfunktion F Begründung: F'(x) =f(x) unbestimmtes Integral F +C

{{Tabelle aufgelöst}}

Potenzfunktion f: x

eine Stammfunktion F: 'int(x 'dx) =(x^2)/2

Begründung: F'(x) =f(x): ((x^2)/2)' =x

unbestimmtes Integral F +C: 'int(x 'dx) =(x^2)/2 +C

---

Potenzfunktion f: x^2

eine Stammfunktion F: 'int(x^2 'dx) =(x^3)/3

Begründung: F'(x) =f(x): ((x^3)/3)' =x^2

unbestimmtes Integral F +C: 'int(x^2 'dx) =(x^3)/3 +C

---

Potenzfunktion f: x^3

eine Stammfunktion F: 'int(x^3 'dx) =(x^4)/4

Begründung: F'(x) =f(x): ((x^4)/4)' =x^3

unbestimmtes Integral F +C: 'int(x^3 'dx) =(x^4)/4 +C

---

Potenzfunktion f: ...

eine Stammfunktion F: ...

Begründung: F'(x) =f(x): ...

unbestimmtes Integral F +C: ...

---

Potenzfunktion f: x^n

eine Stammfunktion F: 'int(x^n 'dx) =(x^(n^1))/(n +1)

Begründung: F'(x) =f(x): ((x^(n +1))/(n +1))' =x^n

unbestimmtes Integral F +C: 'int(x^n 'dx) =(x^(n^1))/(n +1) +C

-----

Die Potenzregel gilt nicht nur für natürliche Exponenten, sondern auch für reelle Exponenten außer -1.

---

|T|: Nur für r =-1 funktioniert die Potenzregel nicht:

Man würde den nicht definierten Ausdruck (x^0)/0 erhalten.

---

##### Satz: Potenzregel

||'int(x^r 'dx) =(x^(r +1))/(r +1) +C

unbestimmtes Integral der Potenzfunktion mit y =x^r für r 'el 'R \ {-1}.

'int(1/x 'dx) ='ln(|x|) +C

unbestimmtes Integral der Hyperbel y =1/x für x \=0.\||

---

Begründung durch Differenzieren:

((x^(r +1))/(r +1))' =((r +1) \*x^r)/(r +1) =x^r

j-177

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

(ln x)' =1/x

'ln(x) existiert nur für positive x-Werte, daher muss der Betrag |x| gebildet werden.

+++Beispiel 6.6: |B|

Integrieren mit der Potenzregel

Ermitteln Sie jeweils das unbestimmte Integral.

a.)

'int(x^5 'dx) =(x^6)/6 +C

---

b.)

'int(1/(x^2 'dx) ='int(x^(-2) 'dx) =(x^(-1))/(-1) +C =-1/x +C

---

c.)

'int('w(x) 'dx) ='int(x^(1/2) 'dx) =(x^(3/2))// (3/2) +C =2/3 \*x \*'w(x) +C

---

d.)

'int(1/('w[3](x)) 'dx) ='int(x^(-1/3) 'dx) =(x^(2/3))// (2/3) =3/2 \*'w[3](x^2) +C

---

e.)

'int(1/x 'dx) ='ln(|x|) +C

-----

Für die Integralrechnung gelten die Faktor- und die Summenregel entsprechend der Differenzialrechnung.

##### Satz: Faktor- und Summenregel

||Faktorregel:

'int(x \*f(x) 'dx) =c \*'int(f(x) 'dx)

Summenregel:

'int((f(x) +-g(x)) 'dx) ='int(f(x) 'dx) +-'int(g(x) 'dx)\||

---

|V|: Faktorregel der Differnzialrechnung:

f(x) =c \*u(x)

f'(x) =c \*u'(x)

|V|: Summenregel der Differenzialrechnung:

f(x) =u(x) +-v(x)

f\*(c) =u'(x) +-v'(x)

---

+++Beispiel 6.7: |B|

Integrieren mit der Potenz-, Faktor- und Summenregel

Ermitteln Sie jeweils das unbestimmte Integral.

a.)

'int((6x^2 +x -2) 'dx) =6 \*(x^3)/3 +(x^2)/2 -2x +C =2x^3 +(x^2)/2 -2x +C

---

b.)

'int((1/x -2/(x^2) +2/(x^3) 'dx) ='int((1/x -2x^(-2) +3 \*x^(-3)) 'dx) ='ln(|x|) -2 \*(x^-1)/(-1) +3 \*(x^-2)/(-2) +C = 'ln(|x| +2/x -3/(2x^2) +C

---

c.)

'int((3x^2 -4x +2)/(2x) 'dx) ='int((3/2 \*x -2 +1/x) 'dx) =3/2 \*(x^2)/2 -2x +'ln(|x|) +C =(3x^2)/4 -2 +'ln(|x|) +C

-----

In der Schreibweise 'int(f(x) 'dx) weist das Symbol "'dx" darauf hin, dass nach der Variablen x integriert wird.

Soll nach einer anderen Variablen integriert werden, etwa nach a, dann wird das durch das Symbol "'da" zum Ausdruck gebracht.

##### Satz: Weitere Grundintegrale

||Integrale von Exponentialfunktionen:

'int('e^x 'dx) ='e^x +C

'int(a^x 'dx) =(a^x)/('ln(a)) +C

'int('e^(k \*x) \*dx) =1/k \*'e^(k \*x) +C

Integrale von trigonometrischen Funktionen:

'int('sin(x) 'dx) =-'cos(x) +C

'int('cos(x) 'dx) ='sin(x) +C\||

---

Begründung:

('e^x)' ='e^x

(a^x)' =a^x \*'ln(a)

('e^(k \*x))' ='e^(k \*x) \*k

('cos(x))' =-'sin(x)

('sin(x))' ='cos(x)

|V|: Bei der Ableitung von 'e^(k \*x) muss die Kettenregel angewendet werden.

j-178

+++Beispiel 6.8: |B|

Grundintegrale

Ermitteln Sie jeweils das unbestimmte Integral.

a.)

'int('e^(0,1 \*x) 'dx) =1/(0,1) \*'e^(0,1 \*x) +C =10 \*'e^(0,1 \*x) +C

---

b.)

'int(2^x 'dx) =(2^x)/('ln(2)) +C

---

c.)

'int((a \*'cos(x) -b \*'sin(x)) 'dx) =a \*'int('cos(x) 'dx) -b \*'int('sin(x) 'dx) =a \*'sin(x) +b \*'cos(x) +C

-----

##### Übersicht Grundintegrale und Ableitungen:

f(x)

integrieren: F(x)

differenzieren: f'(x)

---

x^n

integrieren: (x^(n +1))/(n +1)

differenzieren: n \*x^(n -1)

---

1/x

integrieren: 'ln(|x|)

differenzieren: -1/(x^2)

---

'e^x

integrieren: 'e^x

differenzieren: 'e^x

---

a^x

integrieren: (a^x)/('ln(a))

differenzieren: a^x \*'ln(a)

---

'sin(x)

integrieren: -'cos(x)

differenzieren: 'cos(x)

---

'cos(x)

integrieren: 'sin(x)

differenzieren: -'sin(x)

---

##### Übungsaufgaben

+++6.001 |B|

Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f.

a.)

f(x) =0

**[]**

---

b.)

f(x) =2,5

**[]**

---

c.)

f(x) =x/2

**[]**

---

d.)

f(x) =x -1

**[]**

---

e.)

f(x) =-x +0,5

**[]**

---

f.)

f(x) =x^2

**[]**

---

g.)

f(x) =x^2

**[]**

---

h.)

f(x) ='e^x

**[]**

---

i.)

f(x) ='sin(x)

**[]**

---

j.)

f(x) =1/x

**[]**

---

k.)

f(x) =x^2 +3x +2)

**[]**

---

l.)

f(x) =3 \*'w(x)

**[]**

-----

+++6.002 |B|

Ermitteln Sie alle Stammfunktionen F von f.

a.)

f(x) =9x^2 -8x +1

**[]**

---

b.)

f(x) =12^3 +16x -16

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2 +1)^2

**[]**

---

d.)

f(x) =(x-1)^3

**[]**

---

e.)

f(x) =(x^2 -5x +1)/x

**[]**

---

f.)

f(x) =3x^2 +'cos(x)

**[]**

-----

+++6.003 |B|

Ermitteln Sie alle Stammfunktionen F von f.

a.)

f(x) =2x +3

**[]**

---

b.)

f(x) =(3x^2)/2 +2x +15

**[]**

---

c.)

f(x) =-'cos(x)

**[]**

---

d.)

f(x) =1/2 \*x^2 -x +1 -1/x

**[]**

---

e.)

f(x) =-4/(x^5)

**[]**

---

f.)

f(x) =x -1/x -1/(x^2)

**[]**

---

g.)

f(x) =1/('w(x))

**[]**

---

h.)

f(x) =3/x +1 -1/('w(x))

**[]**

---

i.)

f(x) ='e^x +'sin(x) -1

**[]**

-----

+++6.004 |B|

Ermitteln Sie alle Stammfunktionen F von f.

a.)

f(x) =-'sin x +4

**[]**

---

b.)

f(x) ='e^x -l3

**[]**

---

c.)

f(x) =5x^4 -1 -'sin(x)

**[]**

---

d.)

f(x) =-2/(x^3)

**[]**

---

e.)

f(x) ='w(x)

**[]**

---

f.)

f(x) =3 \*'w(x) -3/('w(x)) -1

**[]**

-----

+++6.005 |B, D|

Entscheiden sie, ob F eine Stammfunktion von f ist:

a.)

F(x): 2/3 x^3 -5

f(x) 2x^2 -5

**[]**

---

F(x): -'sin(x) -4

f(x): 'cos(x)

**[]**

---

F(x): 4'e^(2x) +3

f(x): 8'e^x

**[]**

---

b.)

F(x): 3/2 x^2 +2

f(x): (3x^3 +3x)/(x^2 +1)

**[]**

---

F(x): 5xz^2

f(x): (5xz^3)/3

**[]**

---

F(x): 1/(4 \*'ln(2)) \*2^x

f(x): 0,25 \*2^x

**[]**

-----

+++6.006 |B|

Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f, deren Graph durch den angegebenen Punkt geht.

a.)

f(x) =3x^3

(2|4)

**[]**

---

b.)

f(x) =2x^2 -5x +2

(1|3)

**[]**

---

c.)

f(x) =x^2 -5x +3 \*'cos(x)

(0|1)

**[]**

---

d.)

f(x) ='w(x) -2

(1|8/3)

**[]**

-----

+++6.007 |B|

Von der Funktion f kennt man die zweite Ableitung f''(x) =x -1.

Berechnen Sie f so, dass P\_1(-2|0) und P\_2(2|4) auf dem Graphen von f liegen.

**[]**

-----

j-179

+++6.008 |B|

Ein Betrieb kennt für eines seiner Produkte den Höchstpreis p\_h =3000 GE/ME sowie die erste Ableitung der Preisfunktion der Nachfrage p'(x) =-3 \*x -29.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Ermitteln Sie die Preisfunktion der Nachfrage.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

**[]**

-----

+++6.009

Ein Betrieb kennt die Grenzkostenfunktion K' für eines seiner Produkte:

K'(x) =6 \*x^2 -38 \*x +64.

Die Kosten bei Produktionsstillstand betragen 4 GE.

a.)

Ermitteln Sie die Kostenfunktion K.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

**[]**

-----

## !!6.2 Flächeninhalt und bestimmtes Integral

### !!6.2.1 Das Flächeninhaltsproblem

Beim Beispiel mit der Integration der Grenzerlösfunktion E'(x) =5 haben Sie schon gesehen, dass die Stammfunktion grafisch als Maßzahl des Flächeninhalts zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse interpretiert werden kann.

Das Grundproblem, das zur Entwicklung der Integralrechnung geführt hat, lautet:

Wie kann der Inhalt von Flächen berechnet werden, die durch krumme Linien begrenzt werden?

|T|: Das Beispiel 6.9 ist eine PISA-Aufgabe.

+++Beispiel 6.9: |A, B, C|

Fläche eines Kontinents

|D|: Bei dieser Aufgabe gibt es keine eindeutige Lösung. Erarbeiten sie in Gruppen eine Schätzung für den Flächeninhalt und recherchieren sie dann die Fläche der Antarktis.

Sie sehen hier eine Karte der Antarktis:

Schätzen Sie die Fläche der Antarktis, indem Sie den Maßstab der Karte benutzen. Schreiben Sie Ihre Rechnung auf und erklären Sie, wie Sie zu Ihrer Schätzung gekommen sind.

{{Grafik: Antarktis}}

**[]**

-----

j-180

### !!6.2.2 Ober- und Untersummen, Riemann-Integral

Untersuchen Sie vorerst Flächen, die vom Graphen einer "gekrümmten" positiven Funktion f und der x-Achse zwischen zwei Stellen x =a und x =b eingeschlossen werden.

Die grundlegende Idee der Integralrechnung besteht darin, die Fläche in "Streifen" zu zerlegen.

Diese Streifen können durch Rechtecke angenähert werden. Wählt man für die Höhe der Rechtecke jeweils den kleinsten Funktionswert der Streifen, spricht man von einer Untersumme, wählt man jeweils den größten Funktionswert der Streifen, spricht man von einer Obersumme.

{{Grafik: Funktionsgraph, Untersumme, Obersumme}}

Der gesuchte Flächeninhalt liegt zwischen der Unter- und der Obersumme.

Die Näherung lässt sich verbessern, indem man die Fläche in noch mehr Streifen (im Grenzfall in unendlich viele) zerlegt:

{{Grafik: Funktionsgraph, Untersumme, Obersumme}}

Je größer die Anzahl der Rechteckstreifen ist, desto kleiner ist der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme.

|T|: Durch eine feinere Zerlegung werden die Obersummen kleiner und die Untersummen größer.

Anhand von monotonen Funktionen und Zerlegungen in gleich breite Intervalle kann das Prinzip der Integralrechnung gezeigt werden.

+++Beispiel 6.10: |A, B, C|

Ober- und Untersumme

Von der Funktion f mit f(x) =x^2 +1 und der x-Achse wird zwischen den Stellen a =1 und b =3 eine Fläche eingeschlossen.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche A näherungsweise durch ein- und umgeschriebene Rechtecke

a.) für n =4,

b.) für n =8,

c.) für n =100 Teilintervalle.

d.) Fassen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

{{Lösung auf Seite 180 und 181}}

Lösung:

a.)

Zerlegen Sie das Intervall [1; 3] in n =4 gleich breite Teilintervalle mit

'De x =(3 -1)/4 =0,5:

a =x\_0 =1;

x\_1 =1,5;

x\_2 =2;

x\_3 =2,5 und

x\_4 =b =3.

Errichten Sie über jedem Teilintervall Rechtecke, deren Höhe der kleinste Funktionswert f\_u(x) bzw. der größte Funktionswert f\_o(x) des Teilintervalls ist. So erhalten Sie Rechtecke, deren Flächeninhalt jenen der gesuchten Fläche annähern.

{{Grafik: Funktionsgraph; Untersumme U\_4 =8,75; Obersumme O\_4 =12,75}}

|T|: Im ersten Teilintervall [1; 1,5] gilt:

f\_u(1) =2 ist der kleinste Funktionswert.

f\_o(1,5) =3,25 ist der größte Funktionswert.

Berechnen Sie die Summe der rot eingezeichneten Rechtecksflächen und bezeichnen Sie diese als Untersumme U\_4 und Obersumme O\_4:

{{Tabelle aufgelöst}}

x\_k: 1

f\_u(x\_k): 2

f\_u(x\_k) \*'De x: 1

---

x\_k: 1,5

f\_u(x\_k): 3,25

f\_u(x\_k) \*'De x: 1,625

---

x\_k: 2

f\_u(x\_k): 5

f\_u(x\_k) \*'De x: 2,5

---

x\_k: 2,5

f\_u(x\_k): 7,25

f\_u(x\_k) \*'De x: 3,625

---

Untersumme U\_4: 8,75

---

x\_k: 1,5

f\_o(x\_k): 3,25

f\_o(x\_k) \*'De x: 1,625

---

x\_k: 2

f\_o(x\_k): 5

f\_o(x\_k) \*'De x: 2,5

---

x\_k: 2,5

f\_o(x\_k): 7,25

f\_o(x\_k) \*'De x: 3,625

---

x\_k: 3

f\_o(x\_k): 10

f\_o(x\_k) \*'De x: 5

---

Obersumme O\_4: 12,75

---

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen U\_4 =8,75 und O\_4 =12,75: 8,75 <A <12,75

---

j-181

b.)

Zerlegen Sie das Intervall [1; 3] in n =8 gleich breite Teilintervalle mit

'De x =(3 -1)/8 =0,25.

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen U\_8 =9,6875 und O\_8 =11,6875.

{{Grafik: Funktionsgraphen; Untersumme; Obersumme}}

---

c.)

Zerlegen Sie das Intervall [1; 3] in n =100 gleich breite Teilintervalle mit 'De x =0,02.

|T|: U\_(100) und O\_(100) können mit GeoGebra mit den Funktionen Untersumme und Obersumme ermittelt werden:

{{Grafik: Eingabe: f(x) =x^2 +1}}

{{Grafik: Eingabe: U\_{100} =Untersumme(f, 1, 3, 100]}}

{{Grafik: Funktionsgraph: U\_(100) =10,5868}}

{{Grafik: Eingabe: U\_{100} =Obersumme(f, 1, 3, 100]}}

{{Grafik: Funktionsgraph: U\_(100) =10,7468}}

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen U\_(100) =10,5868 und O\_(100) =10,7468. Eine gute Näherung für A ist das arithmetische Mittel von U\_(100) und O\_(100):

A ~~(10,5868 +10,7468)/2 =10,6668

---

d.)

Insgesamt erhalten Sie:

Wenn die Anzahl der Rechteckstreifen erhöht und damit ihre Breite verkleinert wird, werden die Untersummen größer und die Obersummen kleiner, die Differenz zwischen Ober- und Untersumme nähert sich dem Wert Null:

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 4

'De x: 0,5

Untersumme: 8,75

Obersumme: 12,75

Differenz: 4

Mittelwert: 10,75

---

n: 8

'De x: 0,25

Untersumme: 9,6875

Obersumme: 11,6875

Differenz: 2

Mittelwert: 10,6875

---

n: 10

'De x: 0,02

Untersumme: 10,5868

Obersumme: 10,7468

Differenz: 0,16

Mittelwert: 10,6668

---

n: -> 'ue

'De x: -> 0

Untersumme: -

Obersumme: -

Differenz: -> 0

Mittelwert: -> 10,6^.

---

Die Unter- und die Obersummen nähern sich dem Wert 10,6 an.

---

|T|: Mit dem GTR können Unter- und Obersummen mit den Funktionen sum und seq aus dem Menü LIST berechnet werden:

{{Grafik: Lösung mit GTR}}

Unter- und Obersumme für 'De x =0,02

-----

j-182

Allgemein kann man beweisen:

Wird die Anzahl der Teilintervalle vergrößert (n -> 'ue) und daraus folgend die Breite der Teilintervalle verkleinert ('De x -> 0), so folgt:

-) Die Untersummen U\_n werden immer größer und nähern sich dem gesuchten Flächeninhalt von unten.

-) Die Obersummen O\_n werden immer kleiner und nähern sich dem gesuchten Flächeninhalt von oben.

-) Existieren weiters die Grenzwerte 'lim[n -> 'ue](U\_n) und 'lim[n -> 'ue](O\_n) und sind sie gleich, dann heißt dieser Grenzwert bestimmtes Integral.

{{Grafik: Funktionsgraph: bestimmtes Integral =Fläche zwischen Kurve und x-Achse}}

##### Definition: Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten

||Eine Funktion f sei beschränkt und auf dem Intervall [a; b] definiert.

Durch a =x\_0 <x\_1 <... <x\_n =b wird eine gleichbreite Zerlegung des Intervalls [a; b] in n Teilintervalle mit der Breite 'De x =x\_k -x\_(k -1) (k =1, ..., n) definiert.

-) 'Si[k =1; n](f\_u(x\_k) \*'De x) heißt Untersumme U\_n, wobei f\_u(x\_k) der kleinste Funktionswert im k-ten Teilintervall ist.

-) 'Si[k =1; n](f\_o(x\_k) \*'De x) heißt Obersumme O\_n, wobei f\_o(x\_k) der größte Funktionswert im k-ten Teilintervall ist.

-) Existiert für n -> 'ue sowohl der Grenzwert 'lim[n -> 'ue](U\_n) als auch der Grenzwert 'lim[n -> 'ue](O\_n) und sind diese Grenzwerte gleich, so heißt dieser Grenzwert bestimmtes Integral von f in den Grenzen a und b:

'lim[n -> 'ue](U\_n) ='lim[n -> 'ue](O\_n) ='int[a; b](f(x) 'dx))

-) Die Funktion f heißt dann (Riemann-)integrierbar.\||

---

|T|: Unter- und Obersumme sind Summen von Produkten.

Diese können grafisch als Summe von Rechteckflächen interpretiert werden.

Das bestimmte Integral ist der Grenzwert einer Summe von Produkten.

---

Bezeichnungen für das bestimmte Integral 'int[a; b](f(x) 'dx):

-) f(x) heißt Integrand,

-) x heißt Integrationsvariable,

-) a und b heißen untere bzw. obere Integrationsgrenze.

Das bestimmte Integral kann auch negativ werden, wenn die Funktion negative Werte annimmt.

---

|T|: Das Integralzeichen 'int, ein langgezogenes S, erinnert an den Grenzwert der Summen.

Das Differenzial 'dx erinnert an die "unendlich kleine" Breite der Rechtecke.

---

##### Satz: Integrierbarkeit stetiger Funktionen

||Jede auf dem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetige Funktion ist dort auch integrierbar.\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph}}

##### Regeln für das bestimmte Integral

{{Tabelle aufgelöst}}

Regel: 'int[a; b](f(x) 'dx) =-'int[b; a](f(x) 'dx)

Erklärung: Vertauscht man die Integrationsgrenzen, ändert das bestimmte Integral sein Vorzeichen.

---

Regel: 'int[a; b](f(x) 'dx) ='int[a; b](f(t) 'dt) ='int[a; b](f(u) 'du) =...

Erklärung: Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist beliebig.

---

Regel: 'int[a; b](f(x) 'dx) ='int[a; c](f(x) 'dx) +'int[c; b](f(x) 'dx)

Erklärung: Die Integration kann an einer beliebigen Stelle unterbrochen werden. (a <c <b)

---

Regel: 'int[a; b]([f(x) +-g(x)] 'dx) ='int[a; b](f(x) 'dx) +-'int[a; b](g(x) 'dx)

Erklärung: Summenregel: Eine Summe wird integriert, indem man jeden Summanden integriert.

---

Regel: 'int[a; b](c \*f(x) 'dx) =c \*'int[a; b](f(x) 'dx)

Erklärung: Faktorregel: Einen konstanten Faktor kann man herausheben.

---

Regel: 'int[a; a](f(x) 'dx) =0

Erklärung: Sind die Integrationsgrenzen gleich, ist das Integral gleich null, da 'De x =a -a =0

---

Regel: I ='int[a; b](f(x) 'dx) und f(x) >=0 in [a; b]

Erklärung: Sind die Funktionswerte von f nicht negativ in [a; b], so ist das bestimmte Integral I gleich dem Flächeninhalt a: A =I

---

j-183

##### Übungsaufgaben

Untersumme:

U\_n ='Si[k =1; n](f\_u(x\_k) \*'De x)

Obersumme:

O\_n ='Si[k =1; n](f\_o(x\_k) \*'De x)

+++6.010 |B, C|

Zerlegen Sie das Intervall [a; b] in n =5 gleich breite Teilintervalle.

Zeichnen Sie jeweils die Rechtecke der Unter- und der Obersumme in das Diagramm ein:

Untersumme:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Obersumme:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

**[]**

---

+++6.011 |B, C|

Zerlegen Sie das gegebene Intervall in n gleich breite Teilintervalle, und berechnen Sie die zugehörige Unter- und Obersumme.

Stellen Sie jeweils die Funktion sowie die Rechtecke der Unter- und Obersummen grafisch dar.

|T|: Ermitteln Sie für jedes Teilintervall jeweils den kleinsten Funktionswert für die Untersumme und den größten Funktionswert für die Obersumme.

a.)

f(x) =x^2 +2

[1; 4]

n =3

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2 -8x +16

[1; 3]

n =4

**[]**

---

c.)

f(x) =x^3

[0; 1]

n =5

**[]**

---

d.)

f(x) =1/x

[1; 2]

n =5

**[]**

-----

+++6.012 |B, C, D|

Berechnen Sie für die gegebenen Funktionen jeweils die Unter- und Obersummen für n =5 und n =10 sowie mit einem technologischen Hilfsmittel für n =20 und n =100.

Verwenden Sie dazu gleich breite Teilintervalle des gegebenen Intervalls. Ermitteln Sie jeweils die Differenz von Ober- und Untersumme und nähern Sie den Inhalt der von der Kurve und der x-Achse im Intervall umschlossenen Fläche durch den Mittelwert von Unter- und Obersumme an. Schreiben Sie die Werte in einer Tabelle an. Interpretieren und erklären Sie die Auffälligkeiten bei den Tabellenwerten.

|T|: Verwendung von Technologie

GeoGebra: Funktionen Untersumme und Obersumme

GTR: Funktionen sum und seq aus dem Menü LIST:

sum(seq(function, variable, lower, upper, step))\*step

a.)

f(x) =x^2

[0; 1]

**[]**

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 10

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 20

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 100

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

b.)

f(x) =4x^3

[0; 1]

**[]**

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 10

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 20

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 100

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

c.)

f(x) =1

[1; 2]

**[]**

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 10

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 20

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 100

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

d.)

f(x) =3 'w(x)

[1;4]

**[]**

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 10

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 20

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

---

n: 100

'De x: **[]**

Untersumme: **[]**

Obersumme: **[]**

Differenz: **[]**

Mittelwert: **[]**

-----

j-184

## !!6.3 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Bisher haben Sie bestimmte Integrale nur näherungsweise mit Unter- und Obersummen berechnet, aber die Berechnung des Grenzwerts ist mühsam.

Wenn Sie sich das bestimmte Integral 'int[a; b](f(t) 'dt) als Fläche vorstellen, erkennen Sie, dass der Wert des bestimmten Integrals ganz wesentlich von der Lage der Grenzen abhängt. Sie können eine Funktion bilden, bei der etwa die obere Grenze des Integrals variabel ist.

|T|: Da es wegen Verwechslungsmöglichkeiten nicht günstig ist, Integrationsvariable und unabhängige Variable der Funktion mit demselben Buchstaben zu bezeichnen, nennt man die Integrationsvariable t.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ein einziger Funktionswert der Integralfunktion G ist dargestellt.

Verändert man x, erhält man weitere Funktionswerte von G.

---

##### Definition: Integralfunktion

Die Funktion G mit G(x) ='int[a; x](f(t) 'dt) heißt Integralfunktion oder Flächeninhaltsfunktion von f für die untere Grenze a.

Die Integralfunktion G ordnet jedem x-Wert der horizontalen Achse den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der horizontalen Achse im Intervall [a; x] zu.

+++Beispiel 6.11: |B, C|

Integralfunktion

Ermitteln Sie die Integralfunktion G der gegebenen Funktionen für die untere Grenze a =0.

Vergleichen Sie die Ableitung der Integralfunktion mit dem Integranden:

a.)

Für die konstante Funktion f mit f(t) =2 erkennt man aus der Grafik:

{{Grafik: nicht übertragen}}

G(x) ='int[0; x](2 'dt) =2x

Ableitung: G'(x) =2

Man sieht: Die Ableitung der Integralfunktion stimmt mit dem Integranden f überein.

---

b.)

Für die identische Funktion f mit f(t) =t erkennt man aus der Grafik:

{{Grafik: nicht übertragen}}

G(x) ='int[0; x](t 'dt) =(x^2)/2

Ableitung G'(x) =x

Man sieht: Die Ableitung der Integralfunktion stimmt mit dem Integranden f überein.

---

c.)

Für die lineare Funktion f mit f(t) =t/2 +1 erkennt man aus der Grafik:

{{Grafik: nicht übertragen}}

G(x) ='int[0; x]((t/2 +1) 'dt) =(x^2)/4 +x

Ableitung G'(x) =x/2 +1

Man sieht: Die Ableitung der Integralfunktion stimmt mit dem Integranden f überein.

Das vorhergehende Beispiel zeigt, dass es einen erstaunlichen Zusammenhang zwischen dem Integranden und der Integralfunktion gibt:

##### Satz: Zusammenhang Integrand und Integralfunktion

||Die Ableitung der Integralfunktion G ist der Integrand f: G'(x) =f(x)\||

---

Um dies zu zeigen, betrachtet man den Flächenzuwachs

'De G =G(x +'De x) -G(x) für eine monoton wachsende Funktion f:

Es gilt:

f(x) \*'De x <='De G <=f(x +'De x) \*'De x | /x

f(x) <=('De G)/('De x) <=f(x +'De x)

Beim Grenzübergang 'De x -> 0 bleibt diese Ungleichung erhalten:

'lim['De x -> 0](f(x)) <='lim['De x ->0]('De G)/('De x) <='lim['De x -> 0](f(x +'De x))

j-185

Wegen der Stetigkeit von f erhält man:

f(x) <=G'(x) <=f(x), also G'(x) =f(x)

Damit erhält man:

Die Ableitung der Integralfunktion G ist der Integrand f, d. h., G ist eine Stammfunktion von f und hat somit die Gestalt F +C.

Das bestimmte Integral kann mit einer Stammfunktion berechnet werden:

G(x) ='int[a; x](f(t) 'dt) =F(x) +C

Für x =a gilt

'int[x; x](f(t) 'dt) =F(a) +C

0 =F(a) +C <--> C =-F(a)

Für x =b ist

'int[a; b](f(t) 'dt) =F(b) +C

'int[a; b](f(t) 'dt) =F(b) -F(a)

Da x nun nicht mehr auftritt, kann für die Integrationsvariable wieder der Buchstabe x verwendet werden.

Sie erhalten folgenden Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral:

##### Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

||Für eine stetige Funktion f gilt:

-) F mit F(x) ='int[a; x](f(t) 'dt) ist eine Stammfunktion von f, d. h. F' =f.

(1. Hauptsatz)

-) Ist F eine (beliebige) Stammfunktion von f, d. h. F' =f, dann gilt:

'int[a; b](f(t) 'dt) =[F(x)]|[a; b] =F(b) -F(a)

Der Wert des bestimmten Integrals ist gleich dem Wert einer Stammfunktion an der oberen Grenze minus den Wert dieser Stammfunktion an der unteren Grenze.

(2. Hauptsatz)\||

---

|T|: Der Hauptsatz stellt einen Zusammenhang zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung her:

Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

---

Dabei ist [F(x)]|[a; b] ab (sprich: "F von x in den Grenzen a und b") eine verkürzte Schreibweise für die Differenz F(b) -F(a).

Dieser Satz ermöglicht die Berechnung eines bestimmten Integrals mithilfe einer Stammfunktion. Dazu ermittelt man etwa durch Umkehrung der Differenziationsregeln eine Stammfunktion und setzt in diese die Integrationsgrenzen ein.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

|T|: Grenzwertbildung

-) beim Differenzieren: Quotient von Differenzen

-) beim Integrieren: Summe von Produkten

##### Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral:

||unbestimmtes Integral

'int(f(x) 'dx) =F(x) +C

Stammfunktion

bestimmtet Integral

'int[a; b](f(x) 'dx)

Flächeninhalt für f(x) >0

---

'int[a; b](f(x) dx =[F(x)]|[a; b] =F(b) -F(a)\||

---

|T|: Berechnung eines bestimmten Integrals:

1. Ermitteln Sie eine Stammfunktion F.

2. Ermitteln Sie F(a) und F(b). (Die Grenzen a und b in F einsetzen.)

3. Berechnen Sie die Differenz F(b) -F(a).

---

Da bei der Berechnung des bestimmten Integrals die Integrationskonstante C wegfällt,

kann sie bei der Stammfunktion weggelassen werden:

[F(x) +C]|[a; b] =(F(b) +C) -(F(a) +C) =F(b) -F(a) =[F(x)]|[a; b]

|!|: Statt [F(x)]|[a; b] wird oft F(x)|[a; b] geschrieben.

j-186

+++Beispiel 6.12: |B, C|

Bestimmtes Integral mit dem Hauptsatz

Gegeben ist das bestimmte Integral 'int[1; 2](x^2 'dx):

a.)

Berechnen Sie dieses bestimmte Integral.

---

b.)

Interpretieren Sie dieses bestimmte Integral grafisch.

---

c.)

Ermitteln Sie dieses bestimmte Integral mit dem GTR.

---

d.)

Ermitteln Sie dieses bestimmte Integral mit GeoGebra.

---

Lösung:

{{Grafik: Funktionsgraph, Lösung mit GTR, Lösung mit GeoGebra}}

a.)

'int[1; 2](x^2 'dx) =[(x^3)/3]|[1; 2] =(2^3)/3 -(1^3)/3 =8/3 -1/3 =7/3

---

b.)

Dieser Wert entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen der Parabel f(x) =x^2 und der x-Achse in den Grenzen a =1 und b =2.

---

c.)

Grafische Lösung:

Geben Sie den Integranden im Y=-Editor ein: Y1 =X2.

Wählen Sie im Menü WINDOW eine geeignete Fenstereinstellung:

Xmin =1; Xmax =3; Xscl =1; Ymin =-2; Ymax =6 und Yscl =1.

Wählen Sie im Menü | 2nd [CALC] den Befehl 7:'int(f(x)dx).

Geben Sie für Lower Limit? die untere Grenze ein: 1 ENTER, für Upper Limit? die obere Grenze: 2 ENTER

Numerische Lösung:

Rufen Sie aus dem Menü MATH die Funktion 9:fnInt auf mit der Syntax: fnInt(Ausdruck, Variable, untere Grenze, obere Grenze)

Geben Sie fnInt(X^2,X,1,2) ein. Sie erhalten den Wert des bestimmten Integrals.

---

d.)

Lösung im Algebra-Fenster.

Geben Sie den Integranden ein: Eingabe: f(x) =x^2

Geben Sie die Funktion Integral[<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>] mit den entsprechenden Werten ein: Eingabe: I=Integral[f, 1, 2]

Lösung im CAS-Fenster:

Geben Sie die Funktion Integral[x^2,1,2] ein.

-----

+++Beispiel 6.13: |B|

Bestimmtes Integral mit dem Hauptsatz

Berechnen Sie das bestimmte Integral 'int[1; 3]((x^2 +1) 'dx).

Lösung:

'int[1; 3]((x^2 +1) 'dx) =[(x^3)/3 +x]|[1; 3] =12 -1 1/3 =10 2/3

-----

+++Beispiel 6.14 |B, C|

Bestimmtes Integral mit dem Hauptsatz

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

Interpretieren Sie deren Wert als Flächeninhalt:

{{Aufgabe auf Seite 186 und 187}}

a.)

'int[1; 4]('w(x) 'dx) ='int[1; 4](x^(1/2) 'dx) =[(x^(3/2))// (3/2) +C]|[1; 4] =[2/3 \*x \*'w(x) +C]|[1; 4] =((16)/3 +C) -(2/3 +C) =(14)/3

Die Integrationskonstante fällt beim bestimmten Integral immer weg.

Daher wird sie in Zukunft beim bestimmten Integral nicht mehr angeschrieben.

Der Wert des bestimmten Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Wurzelfunktion f mit f(x) ='w(x) und der x-Achse in den Grenzen a =1 und b =4.

{{Grafik: Bestimmtes Integral mit einem CAS}}

---

j-187

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

b.)

'int[1; 2]((6x^2 +x -2) 'dx) =[2c^3 +(x^2)/2 -2x]|[1; 2] =14 -0,5 =13,5

Der Wert des bestimmten Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit f(x) =6 \*x^2 +x -2 und der x-Achse in den Grenzen a =1 und b =2.

---

c.)

'int[1; 3]((1/x -2/(x^2) +3/(x^3) 'dx) =['ln(|x|) +2/x -3/(2x^2)]|[1; 3] =('ln(3) +2/3 -1/6) -('ln(1) +2 -3/2) ='ln(3) ~~1,0986

Grafische Interpretation: siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

d.)

'int[2; 4](1/x 'dx) =['ln(|x|)]|[2; 4] ='ln(4) -'ln(2) ='ln(4/2) ='ln(2) ~~0,6931

'int[-4; -2](1/x 'dx) =['ln(|x|)]|[-4; -2] ='ln(2) -'ln(4) ='ln(2/4) ='ln(1/2) ~~-0,6931

---

e.)

'int[0; 'pi]('sin(x) 'dx) =[-'cos(x)]|[0; 'pi] =(-'cos('pi)) -(-'cos(0)) =(-(-1)) -(-1) =2

Beachten Sie, dass das Ergebnis ganzzahlig ist, obwohl das Integrationsintervall die irrationale Zahl n enthält.

Der Wert des bestimmten Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Sinusfunktion mit der x-Achse im Intervall [0; n] einschließt.

-----

##### Übungsaufgaben

+++6.013 |B, C|

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale (a <b, a, b 'el 'R).

Interpretieren Sie diese geometrisch durch eine Zeichnung.

a.)

'int[a; b]('dx)

**[]**

---

b.)

'int[0; 2](x^2 'dx)

**[]**

---

c.)

'int[1; 2]('e^x 'dx)

**[]**

---

d.)

'int[0; ('pi)/2]('sin(x) 'dx)

**[]**

---

e.)

'int[1; 3](3x^2 'dx)

**[]**

---

f.)

'int[2; 5](4x^3 'dx)

**[]**

-----

+++6.014 |B, C|

Ermitteln und interpretieren Sie geometrisch durch eine Zeichnung.

a.)

'int[2; 6]((1/2 \*x^2 -x +1 -1/x) 'dx)

**[]**

---

b.)

'int[1; 4]((3/x +1 -1/('w(x)) 'dx)

**[]**

---

c.)

'int[0; 'pi]((5x^4 +1 -'sin(x)) 'dx)

**[]**

---

d.)

'int[-3; -2]((-2/(x^3)) 'dx)

**[]**

-----

+++6.015 |B|

Ermitteln Sie die Integrationsgrenze z so, dass das bestimmte Integral jeweils den angegebenen Wert besitzt.

a.)

'int[2; z]((x/2 +2) 'dx) =16

**[]**

---

b.)

'int[z; 1]((3x -4) 'dx) =-16,5

**[]**

---

c.)

'int[2; z](x^2)/4 'dx) =9,75

**[]**

-----

j-188

## !!6.4 Integral als orientierter Flächeninhalt

Das bestimmte Integral kann für Funktionen mit positiven Funktionswerten als Flächeninhalt interpretiert werden.

Sind die Funktionswerte allerdings negativ, so ist auch das bestimmte Integral negativ.

+++Beispiel 6.15: |B, C, D|

Berechnung eines Flächeninhalts

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) =x^3 -3 \*x^2 +2.

a.)

Berechnen Sie das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen x =0 und x =2.

---

b.)

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt der Flächen zwischen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [0; 2].

(siehe Skizze in der Randspalte)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Gesamtfläche.

---

Lösung:

a.)

Wenn Sie die Funktion f über das Intervall [0; 2] integrieren, erhalten Sie ein überraschendes Ergebnis:

'int[0; 2]((x^3 -3x^2 +2) 'dx) =[(x^4)/4 -x^3 +2x]|[0; 2] =(4 -8 +4) -(0) =0

Das bestimmte Integral hat den Wert Null, obwohl die Fläche sicher einen positiven Flächeninhalt hat.

---

b.)

Das hat folgenden Grund: Im Intervall [0; 1] sind die Funktionswerte positiv und damit auch das bestimmte Integral über dieses Intervall, im Intervall [1; 2] sind die Funktionswerte negativ und damit auch das bestimmte Integral über dieses Intervall:

'int[0; 1]((x^3 -3x^2 +2) 'dx) =[(x^4)/4 -x^3 +2x]|[0; 1] =(1/4 -1 +2) -(0) =1,25

'int[1; 2]((x^3 -3x^2 +2) 'dx) =[(x^4)/4 -x^3 +2x]|[1; 2] =(4 -8 +4) -(1/4 -1 +2) =-1,25

Das positive und das negative bestimmte Integral heben einander auf.

---

c.)

Die Gesamtfläche erhält man, indem man vom negativen bestimmten Integral den Betrag nimmt:

A =1,25 +|-1,25| =2,5

Die Gesamtfläche beträgt 2,5 Flächeneinheiten.

-----

Soll das bestimmte Integral als Flächeninhalt interpretiert werden, muss beachtet werden, ob der Funktionsgraph oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.

##### Orientierung

||-) Liegt der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse, stimmt das bestimmte Integral mit dem Flächeninhalt überein, die Randkurve wird beim Integrieren gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen (positive Orientierung).

-) Liegt der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, entspricht das bestimmte Integral dem negativen Flächeninhalt, die Randkurve wird beim Integrieren im Uhrzeigersinn durchlaufen (negative Orientierung).\||

---

Für Flächen, die durch eine geschlossene Kurve begrenzt sind, definiert man:

Positive/Negative Orientierung:

Die Randkurve wird gegen den/im Uhrzeigersinn durchlaufen.

{{Grafik: Kurve im positiven Sinn durchlaufen (gegen den Uhrzeigersinn); Kurve im negativen Sinn durchlaufen (im Uhrzeigersinn)}}

j-189

##### Bestimmtes Integral als orientierter Flächeninhalt

||Bei der Berechnung des Inhalts A einer Fläche, die vom Graphen einer Funktion f und der x-Achse im Intervall [a; b] eingeschlossen wird, muss das bestimmte Integral als orientierter Flächeninhalt interpretiert werden:

-) Ist f auf [a; b] beständig positiv, dann gilt: A ='int[a; b](f(x) 'dx)

(positive Orientierung der Randkurve)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-) Ist f auf [a; b] beständig negativ, dann gilt: A =-'int[a; b](f(x) 'dx)

(negative Orientierung der Randkurve)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-) Ist f auf [a; b] stückweise positiv oder negativ, dann muss über die positiven und negativen Teile gesondert integriert werden. Schneidet die Funktion im Intervall [a; b] die x-Achse in den Stellen x\_1, x\_2, ..., x\_n, so muss das Intervall in Teilintervalle zerlegt werden, sodass die Funktion in jedem Teilintervall vorzeichenbeständig ist. Die einzelnen Flächeninhalte müssen gesondert ermittelt und schließlich addiert werden:

A =|'int[a; x\_1](f(x) 'dx)| +|'int[x\_1; x\_2](f(x) 'dx)| +... +|'int[x\_n; b](f(x) 'dx)|

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}\||

---

Ein einfacher Weg zur numerischen Flächenberechnung mit Technologieunterstützung ist die Verwendung des Absolutbetrages einer Funktion.

A ='int[a; b](|f(x)| 'dx)

Eingabe der Funktion: y =abs(f(x))

Bei dieser Vorgangsweise ist es möglich, Flächeninhalte zu berechnen, ohne zwischen den Integrationsgrenzen Nullstellen berücksichtigen zu müssen.

Abweichungen von den exakten Ergebnissen sind auf die von den Rechnern verwendeten numerischen Methoden zurückzuführen.

+++Beispiel 6.16: |B|

Berechnung eines Flächeninhaltes

Vom Graphen der Funktion f mit f(x) =(x^3)/8 +1 und der x-Achse wird im Intervall [-3; 3] eine Fläche umschlossen.

a.)

Stellen Sie diese Fläche grafisch dar.

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

1. Schritt: Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

(x^3)/8 +1 =0 <--> x^3 =-8 <--> x =-2

Die Nullstelle liegt innerhalb des Integrationsintervalls. Die Integration ist an der Stelle x =-2 zu unterbrechen.

2. Schritt: Integrieren Sie in zwei Teilen.

A\_1 =-'int[-3; -2](((x^3)/8 +1) 'dx) =-[(x^4)/(32) +x]|[-3; -2] =-[(1/2 -2) -(81)/(32) -3)] =1 1/(32)

A\_2 ='int[-2; 3](((x^3)/8 +1) 'dx) =[(x^4)/(32) +x]|[-2; 3] =[((81)/(32) +3) -(1/2 -2)] =7 1/(32)

A =A\_1 +A\_2 =8 1/16 =8,0625

Die numerische Berechnung kann mit einem technologischen Hilfsmittel (GTR, GeoGebra) mithilfe des Absolutbetrages der Funktion erfolgen.

In diesem Fall muss die Nullstelle innerhalb des Integrationsintervalls nicht berücksichtigt werden.

Beachten Sie, dass der Näherungswert des GTR vom exakten Ergebnis abweicht.

{{Grafik: Berechnung mit GeoGebra}}

{{Grafik: Berechnung mit GTR}}

j-190

+++Beispiel 6.17: |B|

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Der Graph der Funktion f mit f(x) =-x^2 +4 und die x-Achse umschließen eine Fläche.

a.)

Stellen Sie diese Fläche grafisch dar.

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Die Flächenstücke links und rechts von der y-Achse sind gleich groß.

---

b.)

1. Schritt: Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

-x^2 +4 =0 x =-2 oder x =2

Die Nullstellen sind x\_1 =-2 und x\_2 =2.

Das Integrationsintervall ist [-2; 2].

2. Schritt: Integration

Da f im Intervall [-2; 2] positiv ist, erhalten wir A durch

A ='int[-2; 2]((-x^2 +4) 'dx) =

aus Symmetriegründen

=2 \*'int[0; 2]((-x^2 +4) 'dx) =2 \*[-(x^3)/3 +4x]|[0; 2] =2 \*(-8/3 +8) -2 \*0 =10 2/3

-----

##### Flächen zwischen zwei Kurven

Den Inhalt der Fläche zwischen zwei stetigen Funktionen f und g im Intervall [a; b] erhält man als Differenz der beiden zwischen den Graphen und der x-Achse liegenden Flächen:

A ='int[a; b)(f(x) 'dx) -'int[a; b](g(x) 'dx) ='int[a; b]((f(x) -g(x)) 'dx)

Dabei spielt die Lage der x-Achse keine Rolle. Verschiebt man beide Kurven um c in y-Richtung, ändert sich der Flächeninhalt nicht:

A ='int[a; b]((f(x) +c -(g(x) +c)) 'dx) ='int[a; b]((f(x) -g(x)) 'dx)

Schneiden die Kurven einander im Integrationsintervall etwa an den Stellen x\_1, ..., x\_n, muss über jedes Teilintervall integriert werden.

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

Zur numerischen Berechnung der Fläche zwischen zwei stetigen Funktionen kann mit Technologieunterstützung der Absolutbetrag der Differenz der Funktionen verwendet werden.

'int[a; b](|f(x) -g(x)| 'dx)

Eingabe des Integranden: y =abs(f(x) -g(x))

Bei dieser Vorgangsweise kann man den Flächeninhalt berechnen, ohne zwischen den Integrationsgrenzen weitere Schnittstellen der Funktionen berücksichtigen zu müssen.

Abweichungen von der exakten Berechnung sind auf die von den Rechnern verwendeten numerischen Methoden zurückzuführen.

+++Beispiel 6.18: |B|

Fläche zwischen zwei Kurven

Die Graphen der beiden Funktionen f mit f(x) ='w(x) und g mit g(x) =x^2 umschließen eine Fläche.

a.)

Stellen Sie diese Fläche grafisch dar.

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

{{Grafik: Berechnung mit Geogebra; Berechnung mit dem GTR}}

---

b.)

1. Schritt: Berechnen Sie die Schnittstellen.

x^2 ='w(x)

x^4 -x =0

x =0 oder x =1

2. Schritt: Integrieren Sie über die Differenz der beiden Funktionen.

A ='int[0; 1](('w(x) -x^2) 'dx) =[2/3 x \*'w(x) -(x^3)/3]|[0; 1] =(2/3 -1/3) -0 =1/3

j-191

+++Beispiel 6.19: |B|

Fläche zwischen zwei Kurven mit innerem Schnittpunkt

Die Graphen der beiden Funktionen f mit f(x) =(x^3)/4 -(11)/4 \*x +2 und g mit g(x) =(^2)/2 -1 umschließen eine Fläche.

a.)

Stellen Sie diese Fläche grafisch dar.

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

---

Lösung:

a.)

siehe Randspalte

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

{{Grafik: Berechnung mit GeoGebra; Berechnung mit dem GTR}}

---

b.)

1. Schritt: Berechnen Sie die Schnittstellen.

(x^3)/4 -(11)/4 x +2 =(x^2)/2 -1 | \*4

x^3 -2x^2 -11x +12 =0

x =-3 oder x =1 oder x =4

2. Schritt: Integrieren Sie in zwei Teilen.

A\_1 ='int[-3; 1]((((x+3)/4 -(11)/4 x +2) -((x^2)/2 -1)) 'dx) ='int[-3; 1](((x^3)/4 -(x^2)/2 -(11)/4 x +3) 'dx) =[(x^4)/(16) -(x^3)/6 -(11x^2)/8 +3x]|[-3; 1] =(40)/3 =13 1/3

A\_2 =|'int[1; 4](((x^3)/4 -(x^2)/2 -(11)/4 x +3) 'dx)| =|[(x^4)/(16) -(x^3)/6 -(11x^2)/8 +3x]|[1; 4]| =(99)/(16) =6 3/(16)

A =A\_1 +A\_2 ~~19,52

-----

+++Beispiel 6.20: |A, B, D|

Hoftor

Ein Hoftor hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Parabelbogen. Die Maße können der Skizze in der Randspalte entnommen werden.

{{Grafik: Skizze des Hoftors;

Das Tor ist symmetrisch. Es ist 1,2 m breit. Links und rechts ist es 1,8 m hoch. In der Mitte ist es 1,95 m hoch. Links, rechts und unten sind die Kanten gerade. Die obere Kante ist ein gleichmäßiger Bogen.}}

a.)

Erklären Sie, warum der Parabelbogen durch eine Funktion h mit h(x) =a \*x^2 +c beschrieben werden kann.

---

b.)

Erstellen Sie die Funktionsgleichung von h.

---

c.)

Das Tor soll mit Kupferblech beschlagen werden.

Berechnen Sie, wieviel Quadratmeter Kupferblech benötigt werden.

---

d.)

Das Kupferblech ist 1 mm dick. Kupfer hat eine Dichte von 8,9 g/(cm^3).

Ermitteln Sie die Masse des benötigten Kupferblechs.

---

Lösung:

a.)

Da der Parabelbogen symmetrisch zur y-Achse liegt, kann er durch eine gerade quadratische Funktion beschrieben werden.

---

b.)

Der Parabelbogen h mit h(x) =a \*x^2 +c hat den Hochpunkt H(0|1,95) und geht durch den Punkt P(0,6|1,8):

h(0) =1,95:

c =1,95

h(0,6) =1,8:

a \*0,62 +1,95 =1,8 <-->a =-5/(12)

h(x) =-5/(12) \*x^2 +1,95

---

c.)

Inhalt A der Torfläche:

A ='int[-0,6; 0,6]((-5/(12) \*x^2 +1,95) 'dx) =2 \*[-5/(12) \*8x^3)/3 +1,95 \*x]|[0; 0,6] =2,28

Es werden 2,28 m^2 Kupferblech benötigt.

---

d.)

Masse =Volumen mal Dichte

Masse m =22800 \*0,1 \*8,9 =20292

Die Masse des benötigten Kupferblechs beträgt ca. 20,3 kg.

-----

j-192

##### Übungsaufgaben

Zeichnen Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils den Graphen der Funktion und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.

+++6.016 |A, B|

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im Intervall [a; b] eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Zeichnen Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils den Graphen der Funktion und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.

a.)

f(x) =x^2 +2x

[-2; 1]

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^2)/2 -2

[-3; 3]

**[]**

---

c.)

f(x) =(x^2)/4 -1

[0; 3]

**[]**

---

d.)

f(x) =(x^2)/4 +x/2 -3/4

[0; 2]

**[]**

---

e.)

f(x) =x^3 +1

[-2; 2]

**[]**

---

f.)

f(x) =x^3 -x^2 -2x

[-1; 1]

**[]**

---

g.)

f(x) =1 -1/x

[0,5; 2]

**[]**

---

h.)

f(x9 =1 -9/(x^2)

[2; 5]

**[]**

-----

+++6.017 |A, B|

Der Graph der Funktion f und die x-Achse umschließen eine Fläche.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Zeichnen Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils den Graphen der Funktion und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.

a.)

f(x) =-x^2 +2x +3

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2 +2x

**[]**

---

c.)

f(x) =x^3 -4x

**[]**

---

d.)

f(x) =x^3 -3x^2

**[]**

---

e.)

f(x) =x^3 -x^2 -2x

**[]**

---

f.)

f(x) =x^3 -4x^2 +3,75x

**[]**

---

g.)

f(x) =x^3 -x^2 -4x +4

**[]**

---

h.)

f(x) =x^4 -13x^2 +36

**[]**

-----

+++6.018 |C, D|

In der Randspalte ist eine Fläche markiert.

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

Erklären Sie, durch welchen Ausdruck der Inhalt der Fläche berechnet wird.

A) 'int[a; b](f(x) 'dx)

B) 'int[-a; a](f(x) 'dx)

C) a \*b -'int[-a; a](f(x) 'dx)

D) 2 \*a \*b -2 \*'int[0; a](f(x) 'dx)

**[]**

-----

+++6.019 |C|

In der Randspalte ist eine Fläche markiert.

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

Kreuzen Sie an, durch welchen Ausdruck der Inhalt der Fläche berechnet wird.

**[]** A) 2 \*('int[a; b](f(x) 'dx) +'int[b; c](f(x) 'dx))

**[]** B) 2 \*('int[0; a](f(x) 'dx) +'int[a; b](f(x) 'dx))

**[]** c) 2 \*('int[0; a](f(x) 'dx) -'int[a; b](f(x) 'dx))

**[]** D) 2 \*('int[0; b](f(x) 'dx) -'int[0; a](f(x) 'dx))

-----

+++6.020 |B|

Der Graph der Funktion f mit f(x) =(x^2)/2 -2, die x-Achse und die Gerade mit y =6 umschließen eine Fläche.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ermitteln Sie deren Inhalt.

**[]**

-----

+++6.021 |B, C, D|

In der Randspalte ist eine Fläche markiert.

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

Max berechnet deren Inhalt A durch den Ausdruck:

A =16 -'int[0; 4](1/4 'dx)

a.)

Erklären Sie, welchen Fehler Max gemacht hat.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie den Ausdruck richtig und berechnen Sie den Flächeninhalt.

**[]**

-----

+++6.022 |A, B|

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

j-193

+++6.023 |B|

Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse soll den angegebenen Inhalt A betragen.

Ermitteln Sie die obere Grenze b des angegebenen Intervalls.

a.)

f(x) =x/2

A =3

[2; b]

**[]**

---

b.)

f(x) =x^2

A =21

[1; b]

**[]**

---

c.)

f(x) =1 +x/4

A =8

[2; b]

**[]**

---

d.)

f(x) =3 \*'sin(x)

A =3

[0; b]

**[]**

-----

+++6.024 |B|

Die Graphen der beiden Funktionen f und g umschließen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt und stellen Sie die Fläche grafisch dar.

a.)

f(x) =(x^2)/2

g(x) =x

**[]**

---

b.)

f(x) =(x^2)/2

g(x) =x +4

**[]**

---

c.)

f(x) =x^2

g(x) =4

**[]**

---

d.)

f(x) =x^2

g(x) =-x^2 +2x

**[]**

-----

+++6.025 |A|

In den unten stehenden Diagrammen sind Flächen markiert, die durch die Graphen von zwei Funktionen begrenzt werden.

Erstellen Sie einen Ausdruck, mit dem der Inhalt dieser Flächen ermittelt werden kann. (Nutzen Sie wenn möglich die Symmetrie der Funktionen.)

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph mit markierter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

-----

+++6.026 |A, B, D|

Eine massive Hofeingangstür hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Parabelbogen. (Maße: siehe Skizze in der Randspalte.)

{{Grafik: Skizze der Hofeingangstür;

Die Tür ist symmetrisch. Sie ist 2,0 m breit. Links und rechts ist sie 2,5 m hoch. In der Mitte ist sie 2,8 m hoch. Links, rechts und unten sind die Kanten gerade. Die obere Kante ist ein gleichmäßiger Bogen.}}

a.)

Erstellen Sie eine Gleichung für die Parabel.

Die Tür ist aus 8 cm dickem Eichenholz gefertigt. Eichenholz hat eine Dichte von 0,86 g/(cm^3).

**[]**

---

b.)

Erklären Sie, warum für die Einheiten der Dichte gilt: g/(cm^3) =kg/(dm^3)

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die Masse der Tür.

**[]**

-----

j-194

+++6.027 |A, B| Eine Augenärztin lässt ein Logo für ihren Webauftritt entwerfen.

Es soll die in der Randspalte abgebildete Form mit den angegebenen Maßen haben.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Der Kreis hat einen Radius von 0,8 cm.

a.)

Erstellen Sie eine Gleichung für den oberen Parabelbogen.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt der durch die Parabelbögen begrenzten Fläche.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie, wie viel Prozent der gesamten Fläche die grün markierte Fläche einnimmt.

**[]**

-----

+++6.028 |A, B|

Das Dach einer Tennishalle hat einen parabelförmigen Querschnitt (Maße: siehe Skizze in der Randspalte).

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Die Tennishalle hat eine Länge von 62 m.

Berechnen Sie das Volumen der Tennishalle.

**[]**

-----

+++6.029 |A, B, D|

Der Querschnitt eines Tunnels ist parabelförmig.

Der Tunnel ist 8,00 Meter (m) breit und 5,60 m hoch.

a.)

Erstellen Sie die Funktionsgleichung für diese Parabel.

**[]**

---

b.)

Durch den Tunnel führen zwei Fahrbahnen mit je 3,00 m Breite.

Überprüfen Sie, ob eine Mindesthöhe h von 2,40 m gegeben ist.

**[]**

---

c.)

Der Tunnel ist 120 m lang.

Berechnen Sie das Volumen des Materials, das beim Tunnelbau abtransportiert werden musste.

**[]**

-----

+++6.030 |A, B, C, D|

Der Bahnhof Flimsbüttel, der an einer schnurgeraden Bahnstrecke liegt, soll einen neuen Bahnsteig bekommen. 300 Meter vor Beginn des neuen Bahnsteigs soll die abzweigende Weiche liegen. Die Gleismitten haben im Bahnhof einen Abstand von 10 Metern. Im Bahnhof selbst läuft das neue Gleis 1000 m parallel zum vorhandenen Gleis, um dann nach weiteren 300 m wieder symmetrisch in das Hauptgleis einzumünden. Die Planung ist perfekt. Die Gleismittenkurve für den gebogenen Teil wurde zu f(x) =-1/(1350000) x^3 +1/(3000) x^2 ermittelt.

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

Offen ist, in welcher Höhe man dem Bauern den Teil des verlorenen Feldes vergütet. Man einigt sich, dass die verlorene Fläche ziemlich genau der Fläche zwischen den Gleismitten entspricht.

Für diese Fläche soll er eine Abfindung erhalten. Wie groß ist diese Fläche? (aus: Partoll et al, Mathe macchiato Analysis, Pearson Verlag 2010)

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

**[]**

-----

Mathe macchiato Analysis ist ein sehr erfolgreicher Mathematikkurs für Schüler und Studenten, in dem die Differenzialrechnung spannend und unterhaltsam durch Cartoons vermittelt wird.

j-195

## !!6.5 Wirtschaftliche Anwendungen der Integralrechnung

### !!6.5.1 Anwendung in der Kosten- und Preistheorie

Durch Differenzieren einer Kosten-, Erlös- oder Gewinnfunktion erhält man die entsprechende Grenzfunktion.

Umgekehrt kann durch Integration ausgehend von der Grenzfunktion die Kosten-, Erlös- oder Gewinnfunktion gewonnen werden.

Dabei ist aber nur die Erlösfunktion eindeutig rekonstruierbar. Für eine Kosten- oder Gewinnfunktion muss eine weitere Bedingung bekannt sein, um sie eindeutig bestimmen zu können.

Die Maßzahl des Flächeninhalts zwischen Grenzkurve und x-Achse kann im Sachzusammenhang als Kosten-, Erlös- oder Gewinnwert interpretiert werden.

+++Beispiel 6.21 |A, B|

Grenzkostenfunktion

Die Grenzkostenfunktion K' bei der Herstellung eines Produktes ist gegeben durch K'(x) =0,03 \*x^2 -1,5 \*x +20.

Die Kosten bei der Kostenkehre betragen 410 GE.

Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K.

Lösung:

Die Kostenfunktion erhält man durch Integration:

K(x) ='int(K'(x) 'dx) ='int((0,03 \*x^2 -1,5 \*x +20) 'dx) =0,01 \*x^3 -0,75 \*x^2 +20 \*x +C

Kotenkehre: K''(x) =0

K''(x) =0,06 \*x -1,5

0 =0,06 \*x -1,5

x\_k =25; d.h., die Kostenkehre liegt bei 25 ME.

K(25) =0,01 \*25^3 -0,75 \*25^2 +20 \*25 +C =410

C =222,5; d.h., die Fixkosten betragen 222,5 GE.

K(x) =0,01 \*x^3 -0,75 \*x^2 +20 \*x +222,5

-----

+++Beispiel 6.22 |A, B, C, D|

Grenzerlösfunktion

In der Randspalte ist der Graph einer Grenzerlösfunktion E' dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Grenzerlösfunktion E'.

---

b.)

Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E.

Erklären Sie, warum die Erlösfunktion eindeutig ermittelt werden kann.

---

c.)

Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

---

d.)

In der Grafik in der Randspalte ist eine Fläche mit dem Inhalt A =30 markiert. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

---

e.)

Ermitteln Sie das bestimmte Integral 'int[0;25](E'(x) 'dx).

Interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.

---

{{Lösung auf Seite 196}}

j-196

Lösung:

a.)

Die Grenzerlösfunktion ist linear mit dem Achsenabschnitt 4 und der Steigung

('De E')/('De x) =(-4)/(20) =-0,2, also E'(x) =-0,2 \*x +4.

---

b.)

E(x) ='int(E'(x) 'dx) ='int((-0,2 \*x +4) 'dx) =-0,1 \*x^2 +4 \*x +C.

Da E(0) =0, gilt: C =0, d.h. E(x) =-0,1 \*x^2 +4 \*x

---

c.)

Der Erlös ist maximal für x =20 (Nullstelle der Grenzerlösfunktion).

E\_(max) =E(20) =-0,1 \*20^2 +4 \*20 =40

Der maximale Erlös beträgt 40 GE.

---

d.)

Der Flächeninhalt A =30 entspricht dem bestimmten Integral 'int[0; 10](E'(x) 'dx) =E(10), d. h., der Erlös bei einem Absatz von 10 ME beträgt 30 GE.

---

e.)

'int[0; 25](E'(x) 'dx) =[-0,1 \*x^2 +4 \*x]|[0; 25] =(-62,5 +100) -(0) =37,5

Der Erlös bei einem Absatz von 25 ME beträgt 37,5 GE. Beachten Sie, dass das bestimmte Integral nicht dem Flächeninhalt zwischen der Grenzerlöskurve und der x-Achse entspricht. Ab x =20 ist die Grenzerlöskurve negativ, dies entspricht einer Abnahme des Erlöses.

-----

### !!6.5.2 Anwendung in der Finanzmathematik - Kontinuierliche Zahlungsströme

Der Barwert eines endlichen Zahlungsstroms mit n Zahlungen Z1, Z\_2, ..., Z\_n zu den Zeitpunkten t\_1, t\_2, ..., t\_n zum dekursiven Jahreszinssatz i berechnet sich nach der Formel

PV ='Si[k =1; n](Z\_k \*(1 +i)^(-t\_k)

|V|: Eine Zahlung Z\_k, die zum Zeitpunkt t\_k fällig ist, wird durch Z\_k \*(1 +i)^(-t\_k) abgezinst und auf den Zeitpunkt t =0 bewertet.

Für theoretische Überlegungen ist es oft günstig, Zahlungen in Form eines kontinuierlichen Zahlungsstroms Z aufzufassen, wobei die Stromgröße Z(t) zum Zeitpunkt t die "Stärke" des Zahlungsstroms angibt.

Der Aufzinsungsfaktor (1 +i) kann auf eine Potenz mit der Basis 'e umgeschrieben werden: 1 +i ='e^('ln(1 +i)).

Dabei bezeichnet ln(1 +i) den zu i äquivalenten stetigen Zinssatz.

Dann lässt sich der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms Z für das Zeitintervall [0; T] berechnen durch

PV ='int[0; T](Z(t) \*'e^(-ln(1 +i) \*t) 'dt)

Für konstante kontinuierliche Zahlungsströme erhält man eine Verallgemeinerung der Rentenformeln. Während bei den Rentenformeln die Unterscheidung zwischen vorschüssig und nachschüssig von großer Bedeutung ist, spielt dies bei den kontinuierlichen Zahlungsströmen keine Rolle. Der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms liegt zwischen den Barwerten der zugehörigen endlichen vorschüssigen und nachschüssigen Renten.

|V|: Bei der Formel für den Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms ersetzt das Integralzeichen das Summenzeichen beim Barwert des endlichen Zahlungsstroms.

j-197

+++Beispiel 6.23: |A, B, C|

Kontinuierlicher Zahlungsstrom

a.)

Jedes Jahr wird ein Betrag 1000,00 € insgesamt fünfmal auf ein Konto eingezahlt, das mit i =10 % verzinst wird.

Berechnen Sie den Barwert, wenn die Zahlungen (i) vorschüssig und (ii) nachschüssig erfolgen.

vorschüssig: Die Raten werden am Anfang des Jahres fällig.

nachschüssig: die Raten werden am Ende des Jahres fällig.

---

b.)

Gegeben ist ein konstanter kontinuierlicher Zahlungsstrom Z mit Z(t) =1000 mit einer jährlichen Verzinsung i =10 % für das Zeitintervall [0; 5].

Berechnen Sie den Barwert dieses Zahlungsstroms.

---

c.)

Stellen Sie den abgezinsten kontinuierlichen Zahlungsstrom grafisch dar. Veranschaulichen Sie den vorschüssigen, den nachschüssigen und den kontinuierlichen Barwert in der Grafik. Interpretieren Sie diese Werte im Hinblick auf die Integralrechnung.

---

Lösung:

a.)

(i) B\_(vor) =1000 +1000 \*1,1^(-1) +1000 \*1,1^(-2) +1000 \*1,1^(-3) +1000 \*1,1^(-4) =1000 +909,09 +826,45 +751,31 +683,01 =4169,87

Der vorschüssige Barwert beträgt 4169,87 €.

(ii) B\_(nach) =1000 \*1,1^(-1) +1000 \*1,1^(-2) +1000 \*1,1^(-3) +1000 \*1,1^(-4) +1000 \*1,1^(-5) =909,09 +826,45 +751,31 +683,01 +620,92 =3790,79 Der nachschüssige Barwert beträgt 3790,79 €.

---

b.)

PV ='int[0; 5](1000 \*'e^(-'ln(1,1) \*t) 'dt) =[1000 \*1/(-'ln(1,1)) \*'e^(-'ln(1,1) \*t)]|[0; 5] =3977,32

Der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms beträgt 3977,32 €.

---

c.)

Abgezinster kontinuierlicher Zahlungsstrom:

f(t) =1000 \*'e^(-'ln(1,1) \*t)

Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: nicht übertragen}}

Der Barwert der zugehörigen endlichen vorschüssigen Rente entspricht der Obersumme des abgezinsten Zahlungsstroms im Zeitintervall [0; 5] für 'De t =1.

Der Barwert der zugehörigen endlichen nachschüssigen Rente entspricht der Untersumme des abgezinsten Zahlungsstroms im Zeitintervall [0; 5] für 'De t =1.

Der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem abgezinsten Zahlungsstrom im Zeitintervall [0; 5].

-----

j-198

##### Übungsaufgaben

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

Grenzkostenfunktion:

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

+++6.031 |A, B|

Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung eines Produkts ist gegeben durch K'(x) =0,03 \*x^2 -0,8 \*x +8.

Die Kosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 230 GE. Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion K.

**[]**

-----

+++6.032 |A, B, C|

Die Grenzerlösfunktion E' für ein Produkt ist gegeben durch E'(x) =-0,2 \*x +6.

a.)

Ermitteln Sie die Erlösfunktion. Erklären Sie, warum die Integrationskonstante bei dieser Funktion ohne zusätzliche Information ermittelt werden kann.

**[]**

---

b.)

Der Grenzerlös für einen Absatz von 40 ME beträgt -2 GE/ME. Interpretieren Sie diesen Wert.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

**[]**

-----

+++6.033 |A, B|

In der Randspalte ist der Graph einer Grenzkostenfunktion K' dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion.

**[]**

---

b.)

Die Fixkosten betragen 25 GE.

Ermitteln Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie das Betriebsoptimum.

**[]**

---

d.)

Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion im Diagramm ein.

**[]**

-----

+++6.034 |A, B, C|

In der Randspalte ist der Graph einer Grenzgewinnfunktion G' dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erstellen Sie die Gleichung der Grenzgewinnfunktion.

**[]**

---

b.)

Erklären Sie, wie Sie in der Grafik die Stelle des maximalen Gewinns ablesen können.

**[]**

---

c.)

Der maximale Gewinn beträgt 45 GE.

Ermitteln Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G.

**[]**

---

d.)

Lesen Sie an der Funktionsgleichung von G die Fixkosten der Kostenfunktion ab.

**[]**

-----

+++6.035 |A, B, C|

Eine Ölgesellschaft rechnet bei den Einnahmen mit einem konstanten kontinuierlichen Zahlungsstrom Z mit Z(t) =2 Mio. Euro jährlich für die nächsten 10 Jahre.

Es wird mit i =8 % verzinst.

a.)

Erstellen Sie eine Formel zur Ermittlung des Barwerts des kontinuierlichen Zahlungsstroms für das Zeitintervall [0; 10].

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie diesen Barwert.

**[]**

---

c.)

In der Randspalte ist der abgezinste kontinuierliche Zahlungsstrom dargestellt. Interpretieren Sie die dargestellte Ober- und Untersumme im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die Barwerte der zugehörigen endlichen vorschüssigen und nachschüssigen Rente.

**[]**

-----

Barwert eines kontinuierlichen Zahlungsstroms:

PV ='int[0; T](Z(t) \*'e^(-'ln(1 +i) \*t) 'dt)

+++6.036 |A, B, D|

Die Autovermietungsfirma Sixt eröffnet in einer bestimmten Region eine neue Filiale. Die Firma geht von der Annahme aus, dass das Einkommen dieser Filiale durch einen monatlichen kontinuierlichen Zahlungsstrom Z mit Z(t) =10000 gegeben ist (t in Monaten, Z(t) in Euro pro Monat).

Die Firma kalkuliert mit einem Zinssatz von i\_(12) =0,5 %.

a.)

Erklären Sie, was durch folgende Rechnung ermittelt wird: 'ln(1,005) ~~0,0049875

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie den Barwert der Einnahmen für die ersten beiden Jahre.

**[]**

-----

+++6.037 |A, B, C|

Eine kleine Brauerei rechnet für die nächsten 10 Jahre mit Einnahmen, die sich mit dem kontinuierlichen Zahlungsstrom Z mit Z(t) =80000 \*'e^(0,05 \*t) beschreiben lassen (t in Jahren, Z(t) in Euro pro Jahr).

a.)

Interpretieren Sie den Wert 'e^(0,05) ~~1,05127 im Sachzusammenhang.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie den Barwert der Einnahmen für die nächsten 10 Jahre für den stetigen Zinssatz =8 %.

**[]**

-----

j-199

## !!6.6 Physikalische Anwendungen der Integralrechnung

### !!6.6.1 Bewegung

Sie wissen bereits, dass Sie durch die Änderungsrate ('ds)/('dt) einer Wegfunktion s die Geschwindigkeit v erhalten:

v(t) =('ds(t))/('dt) <--> s(t) ='int(v(t) 'dt)

Durch die Änderungsrate ('dv)/('dt) einer Geschwindigkeitsfunktion v erhalten Sie die Beschleunigung a:

a(t) =('dv(t))/('dt) <--> 'int(a(t) 'dt)

Durch Integrieren der Geschwindigkeitsfunktion v können Sie die Weg-Zeit-Funktion s berechnen:

s(t) ='int(v(t) 'dt)

Der zurückgelegte Weg s(t\_0) zum Zeitpunkt t\_0 entspricht der Maßzahl des Flächeninhalts unter dem Graphen im v-t-Diagramm im Intervall [0; t\_0]:

s(t\_0) ='int[0; t\_0](v(t) 'dt)

Durch Integrieren der Beschleunigungsfunktion a können Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v berechnen:

v(t) ='int(a(t) 'dt)

Die Geschwindigkeit v(t\_0) zum Zeitpunkt t\_0 entspricht der Maßzahl des Flächeninhalts unter dem Graphen im a-t-Diagramm im Intervall [0; t\_0]:

v(t\_0) ='int[0; t\_0](a(t) 'dt)

##### zurückgelegter Weg s

||Die Maßzahl der Fläche unter dem Funktionsgraphen v im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm entspricht dem zurückgelegten Weg s im Zeitintervall [t\_1; t\_2].\||

---

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

+++Beispiel 6.24: |A, B, C|

Wanderer

Ein Wanderer bewegt sich gleichförmig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 km/h. Im Diagramm in der Randspalte ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit dargestellt.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Interpretieren Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.

---

b.)

Stellen Sie den Weg, den der Wanderer nach t0 Stunden zurückgelegt hat, als Integral dar. Berechnen Sie dieses Integral.

c.)

Erstellen Sie die Weg-Zeit-Funktion des Wanderers.

Erklären Sie den Zusammenhang mit der Geschwindigkeitsfunktion.

---

Lösung:

a.)

Der Inhalt A =15 der markierten Fläche entspricht dem Weg 15 km, den der Wanderer in 3 Stunden zurücklegt.

---

b.)

s(t\_0) ='int[0; t\_0](5 'dt) =[5 \*t]|[0; t\_0] =5 \*t\_0

---

c.)

s(t) =5 \*t. Die Weg-Zeit-Funktion s ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeitsfunktion v.

-----

j-200

+++Beispiel 6.25: |A, B, C|

Freier Fall

Eine Stahlkugel wird von einem Turm fallen gelassen.

Die Geschwindigkeit dieses frei fallenden Körpers (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands) lässt sich beschreiben durch: v(t) =10 \*t

t Fallzeit in s

v(t) Geschwindigkeit in m/s nach t Sekunden

a.)

Erstellen Sie die Funktion, die den zurückgelegten Weg beschreibt.

---

b.)

Erstellen Sie die Beschleunigungsfunktion.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

---

c.)

Ermitteln Sie den Weg, den die Stahlkugel nach 3 Sekunden zurückgelegt hat.

---

d.)

Stellen Sie den zurückgelegten Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit in drei Diagrammen dar.

Erklären Sie anhand dieser Diagramme den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung für den Zeitpunkt t =3 s.

---

Lösung:

a.)

Die Funktion des zurückgelegten Wegs erhalten Sie durch Integrieren: s(t) ='int(v(t) 'dt) ='int(10 \*t 'dt) =5 \*t^2 +C.

Für s(0) =0 erhalten Sie C =0. s(t) =5 \*t^2

---

b.)

Die Beschleunigungsfunktion erhalten Sie durch Differenzieren:

a(t) =('dv)/('dt) =10

Der erhaltene Zahlenwert entspricht der Erdbeschleunigung g ~~10 m/(s^2).

Diese Beschleunigung ist während des Fallvorgangs konstant.

---

c.)

s(3) ='int[0; 3](v(t) 'dt) ='int[0;3](10 \*t 'dt) =[5 \*t^2]|[0; 3] =45

Der frei fallende Körper hat nach 3 Sekunden einen Weg von 45 m zurückgelegt

---

d.)

Diagramme: siehe Randspalte

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

Die Maßzahl der Fläche unter der Beschleunigungskurve im Zeitintervall [0; 3] ist 30. Dies entspricht der Geschwindigkeit 30 m/s, die der frei fallende Körper nach 3 Sekunden besitzt.

Die Maßzahl der Fläche unter der Geschwindigkeitskurve im Zeitintervall [0; 3] ist 45. Dies entspricht dem Weg, den der frei fallende Körper nach 3 Sekunden zurückgelegt hat.

-----

j-201

### !!6.6.2 Volumenstrom

Der Volumenstrom gibt an, wie viel Volumen einer Flüssigkeit pro Zeiteinheit transportiert wird.

Ein positiver Volumenstrom ist ein Zufluss, ein negativer Volumenstrom ist ein Abfluss. Beschreibt die Funktion z den momentanen Volumenstrom einer Flüssigkeit im Zeitintervall [0; t\_0], dann kann durch das bestimmte Integral V ='int[0; t\_0](z(t) 'dt) das Volumen der zugeflossenen Flüssigkeit ermittelt werden.

Durch Integrieren des Volumenstroms z erhält man die Volumenfunktion V der zugeflossenen Flüssigkeitsmenge:

V(t) ='int(z(t) 'dt)

Die SI-Einheit des Volumenstroms ist (m^3)/s.

Je nach Größenordnung des Volumenstroms sind auch viele andere Einheiten gebräuchlich.

+++Beispiel 6.26: |A, B, C|

Auffangbecken

In ein Auffangbecken fließen pro Sekunde 50 Liter Wasser.

Im Diagramm in der Randspalte ist der Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom z und der Zeit t dargestellt.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Interpretieren Sie den Inhalt A =150 der markierten Fläche im Sachzusammenhang.

---

b.)

Stellen Sie die nach t\_0 Sekunden zugeflossene Wassermenge als Integral dar. Berechnen Sie dieses Integral.

---

c.)

Im Auffangbecken befinden sich anfangs 2000 Liter Wasser.

Erstellen Sie eine Funktion V\_(ges), die das gesamte Wasservolumen im Auffangbecken in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

---

d.)

Erstellen Sie die Funktion V, die das zugeflossene Wasservolumen beschreibt.

---

Lösung:

a.)

Der Inhalt A =150 der markierten Fläche entspricht der in drei Sekunden zugeflossenen Wassermenge von 150 Litern.

---

b.)

V(t\_0) ='int[0; t\_0](50 'dt) =[50 \*t]|[0; t\_0] =50 \*t\_0

---

c.)

Die Funktion V\_(ges) kann mit dem bestimmten Integral ermittelt werden:

V\_(ges)(t) ='int(50 'dt) =50 \*t +C

V\_(ges)(0) =C =2000

V\_(ges)(t) =50 \*t +2000

---

d.)

V(t) ='int(50 'dt) =50 \*t +C

V(0) =C =0

V(t) =50 \*t +0 =50 \*t

Die Integrationskonstante ist 0, da zum Zeitpunkt t =0 noch kein Wasser zugeflossen ist.

-----

+++Beispiel 6.27: |A, B, C|

Leck

Durch ein Leck fließt bei einem Auffangbecken Wasser ab.

Nach 4 Stunden ist das Becken leer.

Der Volumenstrom z lässt sich beschreiben durch z(t) =2,5 \*t^2 -20 \*t +40.

t Zeit in h, 0 <=t <=4

z(t) Volumenstrom in (m^3)/h zum Zeitpunkt t

a.)

Ermitteln Sie das Volumen der gesamten abgeflossenen Wassermenge.

---

b.)

Im Diagramm ist eine Fläche mit dem Inhalt A =22,5 markiert.

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

---

c.)

Erstellen Sie eine Funktion V, die das Volumen des abgeflossenen Wassers nach t Stunden beschreibt.

---

d.)

Erstellen Sie eine Funktion V\_(ges), die das gesamte Wasservolumen im Auffangbecken in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

---

{{Lösung auf Seite 202}}

j-202

Lösung:

a.)

V ='int[0; 4]((2,5 \*t^2 -20 \*t +40) 'dt) =[2,5 \*(t^3)/3 -20 \*t^2 +40 \*t]|[0; 4] =53,3^.

Es sind ca. 53,3 m^3 Wasser abgeflossen.

---

b.)

Der Inhalt A =22,5 der markierten Fläche entspricht der im Zeitintervall [1; 4] abgeflossenen Wassermenge von 22,5 m^3.

---

c.)

Das Volumen des abgeflossenen Wassers wird durch das unbestimmte Integral des Volumenstroms beschrieben:

V(t) ='int((2,5 \*t^2 -20 \*t +40) 'dt) =5/6 \*t^3 -10 \*t^2 +40 \*t +C

V(0) =C =0 --> V(t) =5 \*t^3 -10 \*t^2 +40 \*t

---

d.)

V\_(ges)(t) =-'int((2,5 \*t^2 -20 \*t +40) 'dt) =-(5/6 \*t^3 -10 \*t2 +40 \*t) +C

V\_(ges)(0) =C =53,3 --> V\_(ges)(t) =53,3^. -5/6 \*t^3 +10 \*t^2 -40 \*t

Das gesamte Volumen ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Anfangsvolumen und dem Volumen des abgeflossenen Wassers.

-----

##### Übungsaufgaben

+++6.038 |A, B, C|

Maria fährt mit ihrem Fahrrad konstant mit der Geschwindigkeit 6 m/s.

a.)

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit in einem Diagramm dar.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Weg, den Maria nach 30 s zurückgelegt hat.

**[]**

---

c.)

Schreiben Sie den zurückgelegten Weg nach 30 s als bestimmtes Integral über die Geschwindigkeit.

Markieren Sie die zugehörige Fläche im Diagramm.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der Weg-Zeit-Funktion.

**[]**

-----

+++6.039 |A, B|

Die Geschwindigkeit v (in m/s) eines fallenden Steins lässt sich beschreiben durch v(t) =g \*t, wobei t die Zeit in s und g ~~9,81 m/(s^2) die Erdbeschleunigung ist.

Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t.

**[]**

-----

+++6.040 |A, B, C|

Ein Autofahrer bremst vor einer roten Ampel. Der Bremsvorgang ist in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm in der Randspalte dargestellt.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus dem Diagramm ab:

-) die Geschwindigkeit des Autos zu Beginn des Bremsvorgangs (geben Sie diese in m/s und auch in km/h an)

**[]**

-) die Zeitspanne, nach der das Auto zum Stillstand kommt

**[]**

-) die Bremsbeschleunigung

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit v in m/s in Abhängigkeit von der Zeit t in s.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie den zurückgelegten Weg mithilfe des Integrals über die Geschwindigkeit.

**[]**

---

d.)

Interpretieren Sie das bestimmte Integral 'int[0; 1](v(t) 'dt) =18 im Sachzusammenhang.

**[]**

---

e.)

Erstellen Sie die Funktionsgleichung für den zurückgelegten Weg s in m in Abhängigkeit von der Zeit t in s.

**[]**

-----

j-203

+++6.041 |A, B, C, D|

Im Straßenverkehr müssen Autofahrer oft ihr Fahrzeug vor einem plötzlich auftauchenden Hindernis zum Stillstand bringen. Die Wegstrecke, die man vom Zeitpunkt des Erblickens eines Hindernisses bis zum Stillstand des Fahrzeugs zurücklegt, heißt Anhalteweg. Dieser setzt sich zusammen aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg.

Der Reaktionsweg ist die Wegstrecke, die das Fahrzeug ungebremst innerhalb der Reaktionszeit zurücklegt.

Der Bremsweg ist der Weg vom Bremsbeginn bis zum Stillstand des Autos. Das v-t-Diagramm in der Randspalte beschreibt den Anhaltevorgang eines Autos.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

{{Grafik: Anhalteweg bei 30 und 50 km/h}}

Bremsbeschleunigungen bei verschiedenen Straßenverhältnissen

{{Tabelle aufgelöst}}

Fahrbahn: trocken

Maximale Bremsbeschleunigung in m/(s^2) (Richtwerte): 8 - 9

---

Fahrbahn: nass

Maximale Bremsbeschleunigung in m/(s^2) (Richtwerte): 5 - 7

---

Fahrbahn: Schnee

Maximale Bremsbeschleunigung in m/(s^2) (Richtwerte): 2

---

Fahrbahn: Eis

Maximale Bremsbeschleunigung in m/(s^2) (Richtwerte): 1

---

Die Werte der Bremsbeschleunigung sind von den Fahrbahnverhältnissen bzw. der Reifenqualität und vom Nässegrad abhängig. (Quelle ADAC)

a.)

Lesen Sie aus der Grafik ab: die Reaktionszeit t\_R, die Bremszeit t\_B (die Zeit vom Beginn des Bremsvorganges bis zum Stillstand) und die Anhaltezeit t\_A.

**[]**

---

b.)

Lesen Sie die Beschleunigung während des Bremsvorganges a\_B (die Bremsbeschleunigung) ab.

Interpretieren Sie das Vorzeichnen der Bremsbeschleunigung.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, wie Sie den Bremsweg mithilfe von Flächen berechnen können.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der stückweise linearen Geschwindigkeitsfunktion.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie den Reaktionsweg, den Bremsweg und den Anhalteweg mithilfe von Integralen.

**[]**

---

f.)

Stellen Sie den Reaktionsweg, den Bremsweg und den Anhalteweg als Flächen im v-t-Diagramm grafisch dar.

**[]**

-----

+++6.042 |A, B, C|

Das v-t-Diagramm in der Randspalte beschreibt einen Fallschirmsprung.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Beschreiben Sie den Verlauf des Fallschirmsprungs in Worten.

Lesen Sie dazu ab:

-) die maximale Geschwindigkeit des Fallschirmspringers

**[]**

-) den Zeitpunkt, an dem die Reißleine gezogen wird und der Fallschirm sich öffnet

**[]**

-) die Dauer des Fallschirmsprungs

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die mittlere Bremsbeschleunigung im Zeitintervall [50; 55].

**[]**

---

c.)

Die Maßzahl des Inhalts der schraffierten Fläche beträgt A =490.

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d.)

Interpretieren Sie das bestimmte Integral 'int[0; 10](v(t) 'dt) ~~300 im Sachzusammenhang.

**[]**

---

e.)

Ermitteln Sie näherungsweise die gesamte Fallhöhe des Fallschirmspringers.

**[]**

-----

+++6.043 |A, B|

Eine Gemeinde hat für einen Wildbach ein Auffangbecken angelegt.

Zur Zeit der Schneeschmelze beträgt die Zuflussrate konstant 240 Liter pro Minute.

a.)

Stellen Sie die Zuflussrate in einem Koordinatensystem grafisch dar.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie die zugeflossene Wassermenge W in Litern zum Zeitpunkt t\_0 in min durch ein Integral und eine Stammfunktion dar. Berechnen Sie die zugeflossene Wassermenge W nach 2 Stunden.

**[]**

-----

j-204

+++6.044 |A, B|

Die Zuflussrate in ein Auffangbecken nach einem heftigen Gewitter kann durch eine Funktion z mit z(t) =a \*(t -120)^2 (t in min, z(t) in L/min) beschrieben werden.

Zum Zeitpunkt t =0 beträgt die Zuflussrate 240 L/min.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Ermitteln Sie a.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie die zugeflossene Wassermenge W zum Zeitpunkt t\_0 in min durch ein Integral und durch eine Stammfunktion dar. Berechnen Sie die zugeflossene Wassermenge W nach 2 Stunden.

**[]**

-----

+++6.045 |B, C|

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

In der Randspalte ist der Graph der Zuflussrate für ein Wasserbecken dargestellt. (Nutzen Sie die Symmetrie des Graphen.) Interpretieren Sie die dargestellte Zuflussratenfunktion im Hinblick auf

-) die negativen Funktionswerte,

**[]**

-) die maximale Wassermenge (wann?) und

**[]**

-) die Wassermenge nach 120 min.

**[]**

---

b.)

Skizzieren Sie im Graphen in der Randspalte die Volumenfunktion. Gehen Sie von einem Anfangsvolumen V(0) =0 aus.

**[]**

-----

+++6.046 |A, B, C|

Ein Staubecken enthält 100 m^3 Wasser. Im Diagramm in der Randspalte ist der Volumenstrom z in (m^3)/h in Abhängigkeit von der Zeit t in h dargestellt.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie jene Zeitintervalle ab, in denen Wasser zufließt und in denen Wasser abfließt.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie die Nullstellen des Graphen.

**[]**

---

c.)

Begründen Sie, warum nach 3 Stunden die Wassermenge im Staubecken größer ist als am Anfang.

**[]**

---

d.)

Begründen Sie, zu welchem Zeitpunkt das Staubecken die größte Wassermenge enthält.

**[]**

---

e.)

Die Zuflussrate z ist gegeben durch z(t) =5 \*t^2 -40 \*t +60.

Berechnen Sie 'int[2; 6](z(t) 'dt).

Erklären Sie, was damit berechnet wird.

**[]**

---

f.)

Ermitteln Sie die Wassermenge im Staubecken nach 6 Stunden.

**[]**

-----

+++6.047 |A, B|

Tetrachlorkohlenstoff (CCI\_4) ist ein hochgiftiges Abfallprodukt bei der Papiererzeugung. Endlich beginnt eine Papierfabrik, die bisher täglich 9 g CCI\_4 ins Abwasser geleitet hat, Filter einzubauen. Dadurch kann die täglich abgeleitete Schadstoffmenge in 6 Tagen auf null gesenkt werden:

Nach 2 Tagen beträgt die Schadstoffmenge 4 g pro Tag, nach 4 Tagen 1 g pro Tag und nach 6 Tagen 0 g pro Tag.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Die gegebenen Messwerte liegen auf einer quadratischen Funktion. Erstellen Sie deren Funktionsgleichung.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie mit diesem quadratischen Modell die in den 6 Tagen ausgestoßene Schadstoffmenge.

**[]**

-----

j-205

##### Ziele erreicht?

+++Z 6.1 |B, C|

Ordnen Sie die gegebenen Funktionsterme in die richtigen Felder der Tabelle ein.

F Stammfunktion

f Funktion

f' Ableitung

{{Ordnen Sie jeweils Stammfunktion, Funktion und Ableitung zu. Schreiben Sie dazu F(x) für die Stammfunktion, f(x) für die Funktion und f'(x) für die Ableitung vor den Term.}}

a.)

**[]** 2 \*x +1;

**[]** x^2 +x;

**[]** 2

---

b.)

**[]** 3 \*x^2 +x;

**[]** x^3 +(x^2)/2 -1;

**[]** 1/4 \*x^4 +(x^3)/6 -x

---

c.)

**[]** 'e^(3 \*x);

**[]** 3 \*'e^(3 \*x);

**[]** 1/3 \*'e^(3 \*x +1)

-----

+++Z 6.2 |C, D|

Ordnen Sie den gegebenen Funktionen eine passende Stammfunktion A bis D zu:

Stammfunktionen:

A: F(x) =3/2 \*'w[3](x^2)

B: F(x) =2 \*'w(x)

C: F(x) =2/3 \*'w(x^3)

D: F(x) =-2/(3 \*'w(x^3)

Funktionen:

**[]** f(x) ='w(x)

**[]** f(x) =1/('w(x))

-----

+++Z 6.3 |A, B|

Erstellen Sie jeweils eine Formel zur Berechnung der dargestellten Fläche A B und ermitteln Sie den Inhalt der Flächen.

a.)

f(x) =x^2 -2 \*x +2

{{Grafik: Funktionsgraph mit dargestellter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

f(x) =x^3 +1

{{Grafik: Funktionsgraph mit dargestellter Fläche nicht übertragen}}

**[]**

-----

j-206

+++Z 6.4 |C, D|

In der Randspalte ist eine Fläche dargestellt, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

{{Grafik: Funktionsgraph mit dargestellter Fläche nicht übertragen}}

Kreuzen Sie an, mit welchem Ausdruck der Inhalt dieser Fläche berechnet werden kann.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**[]**: 'int[-b; b]((f(x) -g(x)) 'dx)

**[]**: 2 \*'int[0; b]((g(x) -f(x)) 'dx)

**[]**: 2 \*'int[a; b]((g(x) -f(x)) 'dx) +'int[-a; a]((f(x) -g(x)) 'dx)

**[]**: 2 \*('int[a; b]((f(x) -g(x)) 'dx) +'int[0; a]((f(x) -f(x)) 'dx))

**[]**: 2 \*('int[-a; -b]((f(x) -g(x)) 'dx) +'int[0; -a]((f(x) -f(x)) 'dx))

**[]**

-----

+++Z 6.5 |A, B, C, D|

In der Randspalte ist der Graph einer Grenzerlösfunktion E' dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Erklären Sie die Bedeutung der Nullstelle x =20 der Grenzerlösfunktion für die Erlösfunktion.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**[]**

---

c.)

Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der markierten Fläche im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d.)

Erstellen Sie die Gleichung der Grenzerlösfunktion.

**[]**

---

e.)

Berechnen Sie die Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion.

**[]**

---

f.)

Erklären Sie, warum bei der Berechnung der Erlösfunktion die Integrationskonstante gleich null sein muss.

**[]**

-----

+++Z 6.6 |A, B, C, D|

In der Randspalte ist das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer 32 Sekunden dauernden Testfahrt eines Fahrzeugs dargestellt.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Erklären Sie anhand des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms, wie sich die Beschleunigung des Fahrzeugs während der Fahrt verändert.

**[]**

---

b.)

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion. Lesen Sie die dazu nötigen Werte aus der Grafik ab.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion v.

Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im Sachzusammenhang.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s.

Nehmen Sie an, dass s(0) =0 m ist.

**[]**

-----

+++Z 6.7 |B, C|

Tetrachlorkohlenstoff (CCI\_4) ist ein hochtoxisches Abfallprodukt bei der Papiererzeugung. Eine Papierfabrik, die bisher jährlich 9 m^3 CCI\_4 ins Abwasser geleitet hat, beginnt damit, Filter einzubauen.

Dadurch sinkt die täglich abgeleitete Schadstoffmenge v.

Diese kann durch eine quadratische Funktion beschrieben werden:

v(t) =1/4 \*t^2 -3 \*t +9

t Zeit in Jahren ab Beginn des Filtereinbaus

v(t) Schadstoffmenge in m^3 pro Jahr nach t Jahren

In der Randspalte ist der Graph von r dargestellt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie den Inhalt der Fläche im Sachzusammenhang.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie, um wieviel Prozent die abgegebene Schadstoffmenge im ersten Jahr nach dem Filtereinbau gesenkt werden konnte.

**[]**

-----

j-207

# !!7 Beschreibende Statistik

"In jenen Tagen erließ Kaiser Augustus den Befehl, alle Bewohner des Reiches in Steuerlisten einzutragen. Dies geschah zum ersten Mal; damals war Quirinius Statthalter von Syrien. Da ging jeder in seine Stadt, um sich eintragen zu lassen."

(Lukas 2, 1-3)

Der Evangelist Lukas beschreibt damit eine statistische Erhebung unmittelbar vor der Geburt Christi.

Bis in das 18. Jahrhundert wurde Statistik nach seiner Wortbedeutung als Staatskunde aufgefasst: status wurde als Zustand oder als Staat gedeutet. Die Statistik sollte die "wirklichen Merkwürdigkeiten einer bürgerlichen Gesellschaft" darstellen.

Die älteste überlieferte Statistik im Sinn dieser Staatskunde ist die im Jahre 1562 von Francesco Sansovino verfasste Sammlung von Staatsbeschreibungen, in welcher der geografische, wirtschaftliche und politische Zustand von diversen Königreichen und Republiken beschrieben wird.

In England entstand eine ganz andere Art der Statistik, die politische Arithmetik, die die zahlenmäßige Entwicklung der Bevölkerung über längere Zeiträume verglich.

Der Belgier Adolphe Quételet (1796 bis 1874) schuf eine wichtige Grundlage für alle künftige statistische Arbeit, nämlich das Konzept der Begriffe Mittelwert und Streuung.

Von den im 18. und 19. Jahrhundert auch auf dem Gebiet der Statistik arbeitenden Mathematikern seien Jakob, Daniel und Nikolaus Bernoulli, Joseph-Louis Lagrange, Leonhard Euler, Pierre-Simon Laplace, Abraham de Moivre und Carl Friedrich Gauß erwähnt, aber auch der geniale Außenseiter Thomas Bayes, ein englischer Geistlicher.

Heute beschleunigt der technologische Fortschritt die Entwicklung der Statistik. Leistungsstarke Softwarepakete ermöglichen auf Knopfdruck, fast beliebige statistische Analysen gegebener Daten durchzuführen. Vielfach werden komplexe statistische, mathematisch richtige Auswertungen von uninformierten und unkritischen Benutzern fehlerhaft interpretiert. Manchmal wird auch der bewusste Versuch einer Manipulation unternommen.

Mit Lukas 2, 1-3 ist (innerhalb einer Übersetzung) eine eindeutige Zuordnung zu den Versen möglich.

{{Grafik: Francesco Sansovino: Sammlung von Staatsbeschreibungen}}

{{Grafik: Adolphe Quételet, 1796 bis 1874, belgischer Mathematiker}}

##### Meine Ziele

||Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

-) die unterschiedlichen Datentypen (nominalskaliert, ordinalskaliert, metrisch) beschreiben und erhobene Daten entsprechend zuordnen,

-) Daten erheben, Häufigkeitsverteilungen, absolute und relative Häufigkeiten grafisch darstellen und interpretieren,

-) die Auswahl einer bestimmten Darstellungsweise problembezogen argumentieren,

-) verschiedene Zentralmaße (arithmetisches Mittel, Median, Modus, geometrisches Mittel) berechnen, interpretieren und ihre Verwendung unter anderem in Bezug auf die verschiedenen Datentypen argumentieren,

-) unterschiedliche Streumaße (Standardabweichung, Varianz, Spannweite, Quartile) berechnen und interpretieren,

-) Median, Quartile und Spannweite in einem Boxplot-Diagramm darstellen und interpretieren,

-) die Lorenzkurve und den Gini-Koeffizienten als Konzentrationsmaß nennen, die zugrundeliegende Idee erklären, berechnen und die Ergebnisse im Kontext deuten.\||

---

|V|: Der Korrelationskoeffizient wurde bereits in 4.2 Regressionsrechnung behandelt.

j-208

Statistisches Denken wird für den mündigen Bürger eines Tages dieselbe Bedeutung haben wie die Fähigkeit, lesen und schreiben zu können.

Herbert George Wells, 1866 bis 1946, engl. Schriftsteller und Pionier der Science-Fiction-Literatur

---

|T|: Beachten Sie:

Statistische Aussagen gelten immer nur für eine große Anzahl von untersuchten Objekten.

Statistische Aussagen haben kaum eine Aussagekraft für einzelne Objekte.

---

Die Statistik beschäftigt sich mit wissenschaftlichen Methoden des Sammelns, der Gliederung und der Analyse von Daten und mit dem Ziehen von Schlüssen und Treffen von Entscheidungen aufgrund der Analysen.

Als Statistik bezeichnet man die Gesamtheit aller Methoden, die zur Erhebung und Untersuchung von Mengen und Daten angewendet werden.

Die beschreibende (deskriptive) Statistik erfasst, beschreibt und analysiert Daten in möglichst übersichtlicher Form ohne Schlussfolgerungen auf eine Grundgesamtheit. Die Darstellung der Daten erfolgt durch Tabellen, Grafiken und Kenngrößen, wie z. B. Mittelwert oder Streuung.

Ist eine Vollerhebung der Grundgesamtheit nicht möglich, wird der Grundgesamtheit zufällig ein Teil - eine Stichprobe - entnommen. Wenn die Stichprobe repräsentativ (typisch) für die Grundgesamtheit ist, können aus dieser Stichprobe Aussagen für die Grundgesamtheit gemacht werden.

Die beurteilende Statistik beschäftigt sich damit, aus dem gesammelten Datenmaterial einer Stichprobe Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit zu ziehen.

Beachten Sie: Statistische Aussagen gelten immer nur für eine große Anzahl von untersuchten Objekten. Statistische Aussagen haben daher im Allgemeinen kaum eine Aussagekraft für einzelne Objekte.

##### Worum geht's hier?

Auszug aus einem Kundenfragebogen der 5 BK der HAK Eisenstadt zum Thema "Eisenstadt - die Einkaufsmetropole!?”.

Allgemeines zu Ihrer Person. Bitte kreuzen Sie an:

||1) Geschlecht:

**[]** männlich

**[]** weiblich

2) Alter in Jahren:

**[]** 0 - 20

**[]** 21 - 40

**[]** 41 - 60

**[]** über 60

3) Wohnbezirk:

**[]** E

**[]** EU

**[]** MA

**[]** ND

**[]** Sonstige

4) Familiennettoeinkommen pro Monat in Euro:

**[]** 0 - 2000

**[]** 2001 - 3000

**[]** 3001 - 4000

**[]** über 4000\||

---

In der vorliegenden Befragung wurden insgesamt 304 Personen in der Eisenstädter Fußgängerzone und in verschiedenen Einkaufszentren von Eisenstadt befragt. Diese Menge von befragten Personen bildet die Stichprobe aus einer Grundgesamtheit aller potenziellen Kunden der Geschäfte und Einkaufszentren in Eisenstadt. Der Umfang der Stichprobe n ist 304.

Die Daten dieser Erhebung werden in der Übungsaufgabe 7.006 ausgewertet.

Die Stichprobe hat die Mächtigkeit 304.

Die beiden elementfremden Teilmengen haben die Mächtigkeiten 179 (w) und 125 (m).

{{Grafik: n =304: Ellipse welche geteilt ist. Die eine Hälfte ist gelb hinterlegt und ist beschriftet mit 179 (w). Die andere Hälfte ist blau hinterlegt und ist beschriftet mit 125 (m).}}

Auswertung der Befragung:

{{Tabellen aufgelöst}}

Frage 1:

Geschlecht: männlich; Anzahl: 125

Geschlecht: weiblich; Anzahl: 179

Summe: 304

---

Frage 2:

Alter: 0 - 20; Anzahl: 51

Alter: 21 - 40; Anzahl: 124

Alter: 41 - 60; Anzahl: 95

Alter: >60; Anzahl: 34

---

Frage 3:

Wohnbezirk: E (Eisenstadt-Stadt); Anzahl: 111

Wohnbezirk: EU (Eisenstadt-Umg.); Anzahl: 145

Wohnbezirk: MA (Mattersburg); Anzahl: 31

Wohnbezirk: ND (Neusiedl); Anzahl: 15

Wohnbezirk: Sonstige; Anzahl: 2

---

Frage 4:

Familiennettoeinkommen in €: 0 - 2000; Anzahl: 126

Familiennettoeinkommen in €: 2001 - 3000; Anzahl: 99

Familiennettoeinkommen in €: 3001 - 4000; Anzahl: 49

Familiennettoeinkommen in €: >4000; Anzahl: 30

---

|V|: Die Daten dieser Erhebung werden in der Übungsaufgabe 7.006 ausgewertet.

j-209

## !!7.1 Grundbegriffe

##### Definition: Grundgesamtheit, Stichprobe

||-) Die Grundgesamtheit ist die Menge der zu beurteilenden Objekte.

-) Der Umfang der Grundgesamtheit ist die Anzahl N der Elemente der Grundgesamtheit.

-) Eine Stichprobe ist eine Menge von Objekten, die der Grundgesamtheit zur Prüfung zufällig entnommen werden.

-) Zufällig bedeutet mit gleicher Chance für alle Objekte der Grundgesamtheit. Die Elemente der Stichprobe müssen die typischen Eigenschaften der Grundgesamtheit wiedergeben, d. h., sie müssen repräsentativ sein.

-) Der Stichprobenumfang ist die Anzahl n der Elemente der Stichprobe.\||

---

|T|: Grundsituation: Aus einer Grundgesamtheit mit N Elementen wird eine Stichprobe mit n Elementen entnommen.

{{Grafik: Grundgesamtheit; Teilmenge davon Stichprobe; Eine kleinere Ellipse in einer größeren Ellipse}}

---

Der Umfang der Grundgesamtheit N ist im Allgemeinen groß im Verhältnis zum Umfang n der Stichprobe, d. h., N <n.

+++Beispiel 7.1: |C|

Grundgesamtheit - Stichprobe

Beschreiben Sie Grundgesamtheit und Umfang der Stichprobe von folgenden Sachverhalten.

|T|: Zufällige Auswahl bedeutet, dass jedes Objekt der Grundgesamtheit dieselbe Chance hat, in die Stichprobe aufgenommen zu werden.

a.)

Ein Getränkehersteller möchte das Konsumverhalten von Jugendlichen einer Region, in der etwa 12000 junge Menschen leben, in ihrer Freizeit untersuchen. In einer Disco werden dazu an einem Samstagabend 50 anwesende Jugendliche im Alter von 16 bis 20 Jahren nach ihrem Getränkekonsum befragt.

---

b.)

Schrauben werden maschinell hergestellt. Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden täglich aus der Tagesproduktion von 5 Millionen Stück zufällig 1000 Stück zur Prüfung entnommen.

---

Lösung:

a.)

Der Umfang der Grundgesamtheit N ist die Anzahl aller Jugendlichen der Region im Alter von 16 bis 20 Jahren: N ~~12000

Der Umfang der Stichprobe beträgt n =50.

---

b.)

Fünf Millionen ist der Umfang der Grundgesamtheit: N =5000000

1000 ist der Umfang der Stichprobe: n =1000

Das Verhältnis der beiden ist

n : N =1000 : 5000000 =1 : 5000 =0,0002 =0,02 %.

Die Stichprobe enthält 0,02 % der Tagesproduktion.

-----

+++Beispiel 7.2: |C|

Merkmale - Merkmalträger - Merkmalwert

Zur Prüfung entnommene Schrauben können in Bezug auf ihre Länge, Ganghöhe, ihren Durchmesser, ihre Masse etc. untersucht werden.

Länge, Ganghöhe, Durchmesser und Masse nennt man Merkmale. Die Schrauben selbst sind die Merkmalträger. Jedes Merkmal ergibt bei der Messung an einem Merkmalträger einen bestimmten Wert, den Merkmalwert, also eine bestimmte Länge, einen bestimmten Durchmesser etc.

Eine Messung liefert für eine Schraube eine Länge von 5,1 cm. Der Merkmalwert ist 5,1 cm. Die Menge aller möglichen Merkmalwerte, die bei der Messung auftreten können, heißt Merkmalwertevorrat.

Dieser ist etwa für das Merkmal Schraubenlänge von 5-cm-Schrauben für eine bestimmte Maschine {x | 4,81 cm <=x <=5,14 cm}. Die kürzeste Schraube ist also 4,81 cm, die längste 5,14 cm lang.

-----

j-210

##### Definition: Merkmal - Merkmalträger

||-) Ein Merkmal ist eine Eigenschaft, die zur Beurteilung der zu untersuchenden Objekte (Merkmalträger) dienen kann. Jedes Merkmal hat zwei oder mehr Merkmalausprägungen.

-) Eine Merkmalausprägung, ein Merkmalwert, ist ein Wert, den ein Merkmal bei einer Messung annimmt.

-) Der Merkmalwertevorrat ist die Menge der Werte, die ein Merkmal annehmen kann.\||

---

|T|: Jedes Merkmal hat zwei oder mehr Merkmalausprägungen.

Wenn eine Eigenschaft nur eine Ausprägung, nur einen Wert hat - beispielsweise hat die Eigenschaft Farbe von roten Ziegelsteinen die Ausprägung, den Wert "rot" - so ist diese Eigenschaft kein Merkmal, weil sie nicht zur Unterscheidung der Objekte in dieser Stichprobe geeignet ist. Kommen andere, z. B. graue Ziegelsteine, hinzu, dann ist die Eigenschaft Farbe ein Merkmal mit den beiden Merkmalausprägungen (Merkmalwerten) "rot" und "grau".

Wenn die Merkmalausprägungen eines Merkmals abzählbar viele Zahlenwerte annehmen können, spricht man von einem diskreten Merkmal. Wenn die Merkmalausprägungen beliebige reelle Zahlenwerte aus einem Intervall annehmen können, spricht man von einem stetigen Merkmal.

|!|: Eine Menge ist abzählbar, wenn sie

a) endlich viele Elemente enthält oder

b) gleichmächtig zu N ist.

Im Fall b) besitzt die Menge abzählbar unendlich viele Elemente.

---

##### Definition: Diskrete und stetige Merkmale

||-) Für ein diskretes Merkmal ist der Merkmalwertevorrat abzählbar.

-) Für ein stetiges Merkmal ist der Merkmalwertevorrat nicht abzählbar.

Der Merkmalwertevorrat eines stetigen Merkmals wird durch ein Intervall festgelegt, in dem unendlich viele Zwischenwerte möglich sind.\||

---

-) Die Größe von Personen, die Tagestemperatur und die Entfernung zwischen Arbeitsplatz und Wohnung sind stetige Merkmale.

-) Die Anzahl der Kinder in einer Familie, die Anzahl der Fernsehzuseher bei einer bestimmten Sendung und der Familienstand sind diskrete Merkmale.

|T|: Ein Messprozess ist eine spannende Sache: Analoge Messgeräte mit Zeigern messen tatsächlich stetig, während ein digitales Messgerät "nur" ein diskretes Ergebnis liefern kann.

Stetige Größen werden im Allgemeinen bei Messungen als diskrete Größen behandelt.

Die Körpergröße wird normalerweise nicht genauer als auf 1/2 cm gemessen.

Dadurch wird aus einem von

Natur aus stetigen Merkmal ein

diskretes: {...; 160; 160,5; 161; 161,5; 162; ...}

Auch für das stetige Merkmal Alter gilt, dass es im Allgemeinen als diskretes behandelt wird: Fragt man nach dem Alter, erhält man meist eine natürliche Zahl als Antwort.

Die theoretisch mögliche Antwort

"Ich bin 14,567 89 Jahre alt" wird in der Realität nicht gegeben.

+++Beispiel 7.3: |C|

Diskrete und stetige Merkmale

{{Tabelle aufgelöst}}

Merkmalträger: Schüler der 2A

Merkmal: Körpergröße

Merkmalwertevorrat: [150 cm; 195 cm]

Merkmal ist diskret/stetig: stetig

---

Merkmalträger: 28. Februar

Merkmal: Temperatur in Bregenz

Merkmalwertevorrat: [-10 °C; 15°C]

Merkmal ist diskret/stetig: stetig

---

Merkmalträger: 28. Februar

Merkmal: Sonnenstunden in Linz

Merkmalwertevorrat: [0; 11]

Merkmal ist diskret/stetig: stetig

---

Merkmalträger: Haushalte in Linz

Merkmal: Anzahl der Personen

Merkmalwertevorrat: {1, 2, 3, 4, ...}

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

---

Merkmalträger: Personen in Wien

Merkmal: Familienstand

Merkmalwertevorrat: {ledig, verheiratet, verwitwet, geschieden}

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

---

Merkmalträger: MAM-Schularbeiten in der HAK St. Pölten

Merkmal: Note

Merkmalwertevorrat: {Sehr gut; gut; Befriedigend; Genügend; Nicht genügend}

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

---

Merkmalträger: Beamte in Tirol

Merkmal: Geschlecht

Merkmalwertevorrat: {m, w}

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

---

Merkmalträger: Beamte in Tirol

Merkmal: Alter

Merkmalwertevorrat: [20; 65]

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

---

Merkmalträger: 1-Euro-Münzen in einer Kassa

Merkmal: Dicke einer 1-Euro-Münze in mm

Merkmalwertevorrat: [2,1; 2,5]

Merkmal ist diskret/stetig: stetig

---

Merkmalträger: Banknoten in einer Kassa

Merkmal: Echtheit der Banknoten

Merkmalwertevorrat: {echt; unecht}

Merkmal ist diskret/stetig: diskret

-----

j-211

##### Skalen in der Statistik

In der Statistik hat jedes Merkmal zwei oder mehr Merkmalausprägungen, die anhand verschiedener Skalen gemessen werden. Das Ausmaß an Informationen einer Menge von Elementen einer statistischen Gesamtheit ist von der benutzten Skala abhängig.

Man unterscheidet vier Skalen:

-) Nominalskala

-) Ordinalskala

-) Intervallskala

-) Verhältnisskala

{{Von oben nach unten: Zunahme der Information}}

{{Tabelle aufgelöst}}

quantitativ:

Skala: Nominalskala

Erklärung: Bei Merkmalen, bei denen die Ausprägungen keine natürliche Reihenfolge bilden. Alle Merkmalausprägungen bestehen gleichberechtigt nebeneinander.

Beispiel (Merkmal): Farbe, Autokennzeichen, Geschlecht, Religion

Bemerkung: Es ist möglich, jeder einzelnen Merkmalausprägung eine Zahl zuzuordnen (Verschlüsselung). Diese Zahlen dienen aber nur zur Identifikation der einzelnen Gruppen.

---

Skala: Ordinalskala

Erklärung: Zwischen den einzelnen Merkmalausprägungen besteht eine natürliche Reihung. Es gibt eine "Größer als"-Beziehung. Die Abstände zwischen den Merkmalausprägungen sind nicht quantifizierbar.

Beispiel (Merkmal): Rang beim Autorennen, Güteklasse bei Eiern, Schulnoten

Bemerkung: Rangskala: Ordinalskala mit ausschließlich ganzzahligen Ordnungszahlen (Rängen), die mit 1 beginnen in ununterbrochener Reihenfolge hintereinanderstehen, z. B. Güteklasse bei Obst: 1, 2, 3, ...

---

metrisch:

Skala: Intervallskala

Erklärung: Außer der Rangordnung ist es hier auch noch möglich, die Abstände zwischen den einzelnen Merkmalausprägungen anzugeben. Der Nullpunkt kann willkürlich festgelegt werden.

Beispiel (Merkmal): Temperaturmessung in °C oder in °F, Kalenderzeitrechnung

Bemerkung: Bei intervallskalierten Merkmalen dürfen keine Quotienten gebildet werden! Es ist z. B. sinnlos zu sagen: 20 °C ist doppelt so warm wie 10 °C.

Skala: Verhältnisskala

Erklärung: Zusätzlich zu den Körpermasse, Franz ist doppelt so alt wie Karl: Anna verdient dreimal so viel wie Bernhard.

---

nomen: lateinisch für Name, Benennung

|T|: Möglicherweise kennen Sie das Sprichwort "Nomen est omen": Der Name ist (ein) Zeichen.

ordo: lateinisch für Reihenfolge, Ordnung

|T|: Bei Wertpapieren gibt es ein Ranking:

1. AAA

2. AA

3. A

Mit AAA sind die besten Papiere ausgezeichnet. Ein klassischer Fall einer Ordinalskala!

intervallum: lateinisch für Zwischenraum, Abstand

|T|: Jede physikalische Größe ist ein Produkt aus Maßzahl und zugehöriger Maßeinheit.

Beispiel: h =2,3 m =230 cm

|V|: Die Kelvinskala hat einen absoluten Nullpunkt bei 0 Kelvin, das sind -273,15 °C, während Celsius- und Fahrenheitskala willkürlich gewählte Nullpunkte haben.

j-212

qualitas: lateinisch für Beschaffenheit

quantum: lateinisch, von quantus: wie viel

-) Merkmale aus einer Nominalskala und einer Ordinalskala werden als qualitative oder artmäßige Merkmale bezeichnet; Ihre Merkmalwerte (Merkmalausprägungen) lassen sich nicht in sinnvoller Weise addieren oder subtrahieren.

-) Merkmale aus einer Intervallskala und einer Verhältnisskala werden als metrische oder quantitative Merkmale bezeichnet, Ihre Merkmalwerte lassen sich addieren oder subtrahieren.

##### Übungsaufgaben

+++7.001 |A, D|

Begründen Sie, ob das Merkmal diskret oder stetig ist. Geben Sie eine passende Grundgesamtheit, einen Merkmalwertevorrat sowie mindestens zwei Merkmalausprägungen an.

a.)

Die Augenzahl beim Würfeln mit einem gewöhnlichen Spielwürfel.

**[]**

---

b.)

Die Länge eines Birkenblattes.

**[]**

---

c.)

Der Typ von Autos auf dem Schulparkplatz.

**[]**

---

d.)

Die Körpergröße der Schüler/innen Ihrer Klasse.

**[]**

---

e.)

Die Schuhgröße der Schüler/innen Ihrer Klasse.

**[]**

---

f.)

Die Zahl der Fehlstunden der Schüler/innen Ihrer Klasse im ersten Halbjahr.

**[]**

-----

+++7.002 |A, D|

Geben Sie jeweils mindestens zwei Merkmale für die nachstehenden Merkmalträger an, versuchen Sie jeweils den Merkmalwertevorrat anzugeben und erklären Sie, ob das Merkmal diskret oder stetig ist.

a.)

Spitzensportler

**[]**

---

b.)

Autor

**[]**

---

c.)

Musiker

**[]**

---

d.)

Gitarre

**[]**

---

e.)

Auto

**[]**

-----

Skalen:

-) Nominalskala

-) Ordinalskala

-) Metrische Skala

+++7.003 |A|

Kreuzen Sie an, welche Ausprägungen folgende Merkmale annehmen können. Ordnen Sie die Merkmale einem Skalenniveau zu.

{{Schreiben sie n für nominal, o für ordinal und m für metrisch in die Eingabemarke.}}

Geschlecht: **[]**

Temperatur in Celsius: **[]**

Körpergewicht: **[]**

Haarfarbe: **[]**

Nettoeinkommen: **[]**

Haus-Nr. in einer Straße: **[]**

Temperatur in Kelvin: **[]**

Zufriedenheit mit Hotel: **[]**

Autonummer: **[]**

Wohnort der Mitschüler: **[]**

-----

+++7.004 |D|

Erklären Sie, welches Skalenniveau Schulnoten 1 (Sehr gut), 2 (Gut), 3 (Befriedigend), 4 (Genügend), 5 (Nicht genügend) haben.

**[]**

-----

j-213

## !!7.2 Häufigkeitsverteilungen

+++Beispiel 7.4: |B|

Häufigkeiten

In einem Wohnblock mit 20 Haushalten wird das Merkmal Haushaltsgröße, die Anzahl der im Haushalt lebenden Personen erhoben.

Es ergeben sich folgende Werte (Urliste):

2; 3; 5; 4; 6; 2; 2; 6; 2; 2; 2; 3; 1; 3; 3; 4; 3; 1; 7; 4

Darstellung in Tabellenform (i ist die Zeilennummer):

|T|: Beachten Sie: In der Urliste mit dem Umfang, n =20 treten nur k =7 verschiedene Merkmalsausprägungen auf, die man in einer Häufigkeitstabelle übersichtlich darstellen kann.

|!|: Die Summe der absoluten Häufigkeiten ist stets der Stichprobenumfang n und die der relativen Häufigkeiten stets 1 oder 100 %.

{{Tabelle aufgelöst}}

Index i: 1

Anzahl der Personen x\_i: 1

absolute Häufigkeit f\_i: 2

relative Häufigkeit h\_i: 0,1

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 2

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,1

---

Index i: 2

Anzahl der Personen x\_i: 2

absolute Häufigkeit f\_i: 6

relative Häufigkeit h\_i: 0,3

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 8

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,4

---

Index i: 3

Anzahl der Personen x\_i: 3

absolute Häufigkeit f\_i: 5

relative Häufigkeit h\_i: 0,25

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 13

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,65

---

Index i: 4

Anzahl der Personen x\_i: 4

absolute Häufigkeit f\_i: 3

relative Häufigkeit h\_i: 0,15

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 16

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,8

---

Index i: 5

Anzahl der Personen x\_i: 5

absolute Häufigkeit f\_i: 1

relative Häufigkeit h\_i: 0,05

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 17

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,85

---

Index i: 6

Anzahl der Personen x\_i: 6

absolute Häufigkeit f\_i: 2

relative Häufigkeit h\_i: 0,1

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 19

relative Summenhäufigkeit H\_i: 0,95

---

Index i: 7

Anzahl der Personen x\_i: 7

absolute Häufigkeit f\_i: 1

relative Häufigkeit h\_i: 0,05

absolute Summenhäufigkeit F\_i: 20

relative Summenhäufigkeit H\_i: 1

---

Summe absolute Häufigkeit f\_i: 20

Summe relative Häufigkeit h\_i: 1

---

In der Urliste mit dem Umfang n =20 treten nur k =7 verschiedene Merkmalsausprägungen auf, die man in einer Häufigkeitstabelle übersichtlich darstellen kann.

Die Summe der absoluten Häufigkeiten ist stets der Stichprobenumfang n und die der relativen Häufigkeiten stets 1 oder 100 %.

-) n =20 Anzahl der Haushalte

-) k =7 verschiedene Merkmalsausprägungen

-) x\_i Merkmalausprägung, Anzahl der im Haushalt lebenden Personen

x 'el {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}

x\_1 =1; x\_2 =2; x\_3 =3; . . .; x\_7 =7

-) f\_i absolute Häufigkeit (engl. frequency) der Anzahl der Personen x\_i

-) h\_i relative Häufigkeit der Personenanzahl

x\_i h\_i =(f\_i)/n =(f\_i)/(20)

-) F\_i absolute Summenhäufigkeit (kumulierte Häufigkeit)

F\_1 =f\_1; F\_2 =f\_1 +f\_2; ...

F\_i =f\_1 +f\_2 +... +f\_i ='Si[j =1; i](f\_j)

-) H\_i relative Summenhäufigkeit

H\_1 =h\_1; H\_2 =h\_1 +h\_2; ...

H\_i =h\_1 +h\_2 +... +h\_i ='Si[j =1; i](h\_j)

|!|: Ausgehend von der absoluten Häufigkeit f\_i ermittelt man

die relative Häufigkeit h\_i =(f\_i)/n,

die absolute Summenhäufigkeit F\_i ='Si[j =1; i](f\_j)

die relative Summenhäufigkeit H\_i ='Si[j =1; i](h\_j)

---

a.)

Berechnen Sie, in wie vielen Haushalten bis zu maximal zwei Personen leben.

---

b.)

Ermitteln Sie, in wie viel Prozent der Haushalte höchstens drei Personen leben.

---

Lösung:

a.)

Sie müssen die absolute Häufigkeit der Haushalte mit einer Person und mit zwei Personen addieren, dies entspricht gerade der Summenhäufigkeit F\_2:

F\_2 =f\_1 +f\_2 =2 +6 =8

In 8 Haushalten leben maximal 2 Personen.

---

b.)

Sie müssen die relative Häufigkeit der Haushalte mit einer, zwei und drei Personen addieren: 0,10 +0,30 +0,25 =0,65

In 65 % der Haushalte leben höchstens drei Personen.

Dieses Ergebnis ist die relative Summenhäufigkeit für drei Personen H\_3 =0,65.

-----

j-214

##### Definition: Häufigkeiten

||-) In der Urliste einer Datenreihe mit Umfang n treten k verschiedene Merkmalsausprägungen auf.

-) Die absolute Häufigkeit f\_i eines Merkmalwertes x\_i ist die Anzahl, mit der der Wert x\_i in der Urliste auftritt.

-) Die relative Häufigkeit h\_i eines Merkmalwertes x\_i ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit f\_i und dem Umfang der Datenreihe n: h\_i =(f\_i)/n

-) Die absolute Summenhäufigkeit F\_i eines Merkmalwertes x\_i ist die Gesamtanzahl der Merkmalsausprägungen, die kleiner oder gleich x\_i sind: F\_i ='Si[j =1; i](f\_j)

-) Die relative Summenhäufigkeit H\_i eines Merkmalwertes x\_i ist die Summe der relativen Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen, die kleiner oder gleich x\_i sind:

-) Die Tabelle für die Häufigkeiten heißt Häufigkeitstabelle.\||

---

h\_i =(f\_i)/n

|!|: Falls jeder Merkmalwert genau einmal auftritt ist

h\_1 =h\_2 =... =h\_n =1/n

Es liegt dann eine diskrete Gleichverteilung vor.

---

##### Satz: Eigenschaften der Häufigkeiten

||Für die Häufigkeiten einer Datenreihe mit Umfang n und k verschiedenen Merkmalsausprägungen gilt:

'Si[i =1; k](f\_i) =n; F\_1 =f\_1 mit F\_k =n

'Si[i =1; k](h\_i) =1; H\_1 =h\_1 mit H\_k =1

f\_i =F\_i -F\_(i -1) für i =2, 3, ..., k

h\_i =H\_i -H\_(i -1) für i =2, 3, ..., k\||

---

|!|: Jeder Merkmalwert x\_i kommt mit der relativen Häufigkeit h\_i vor.

Durch die Zuordnung x\_i -> h\_i wird die relative Gesamthäufigkeit 1 auf die Merkmalwerte verteilt.

---

+++Beispiel 7.5 |B|

Häufigkeiten (Fortsetzung von Beispiel 7.4)

Darstellung der absoluten Häufigkeiten (n =20, k =7) in Diagrammen: x\_i Anzahl der Personen im Haushalt f\_i absolute Häufigkeit für x\_i

{{Tabelle aufgelöst}}

x\_i: 1

f\_i: 2

---

x\_i: 2

f\_i: 6

---

x\_i: 3

f\_i: 5

---

x\_i: 4

f\_i: 3

---

x\_i: 5

f\_i: 1

---

x\_i: 6

f\_i: 2

---

x\_i: 7

f\_i: 1

---

Summe f\_i: 20

a.)

als Histogramm

{{Grafik: Histogramm nicht übertragen}}

---

b.)

als Stabdiagramm

{{Grafik: Stabdiagramm nicht übertragen}}

-----

j-215

##### Diagrammtypen

Aus der großen Fülle von grafischen Darstellungsformen werden hier einige genauer besprochen.

##### Qualitative Daten

Kreisdiagramm, Stabdiagramm, Säulendiagramm, Balkendiagramm

||Kreisdiagramm, Tortendarstellung

{{Grafik: Feinstaub-Emissionen Kreisdiagramm:

Kleinverbraucher: 36,9 %

Pkw Diesel: 6,6 %

Busse: 0,4 %

Straßenverkehr: 14,9 %

Industrie: 31,5 %

Lkw: 7,9 %

Landwirtschaft: 8,4 %

Offroadmaschinen: 4,5 %

Kraft- und Heizwerke 3,9 %

Quelle: ÖAMTC-AKADEMIE}}

In einem Kreisdiagramm entspricht jede vorkommende Merkmalsausprägung einem Kreissektor, dessen Flächeninhalt proportional zur Häufigkeit der im Allgemeinen qualitativen Merkmalausprägung ist.

Für den Zentriwinkel 'al des j-ten Kreissektors gilt: 'a\_j =360° \*h\_j

h\_j relative Häufigkeit

|!|: Auf eine dreidimensionale Darstellung sollte man im Allgemeinen verzichten, da dreidimensionale Figuren aufgrund ihres Volumens geschätzt werden.

---

Beschreibende Statistik

Stabdiagramm, Säulendiagramm, Balkendiagramm

BIP-Wachstum in %

{{Grafik: Stabdiagramm, Säulendiagramm, Balkendiagramm nicht übertragen}}

Das Stabdiagramm findet bei qualitativen Merkmalen Verwendung. Es besteht aus voneinander getrennten Säulen oder Balken mit konstanter Breite.

Die Länge der Säulen oder Balken gibt die Häufigkeit an.\||

---

##### Metrische Daten

Histogramm, Liniendiagramm

||Histogramm

{{Grafik: Histogramm nicht übertragen}}

Das Histogramm findet bei metrischen

Daten Verwendung und besteht aus aneinander grenzenden Rechtecken. Die Breite der Rechtecke (auf der x-Achse) wird durch die Klassenbreite bestimmt. Die Fläche des jeweiligen Rechtecks ist das Maß für die Häufigkeit der jeweiligen Klasse. Die Höhe der Rechtecke ist anzupassen.

Ein Histogramm ist die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung von Messwerten.

Man geht dabei von den nach Größe geordneten Daten aus und teilt den gesamten Bereich der Datenreihe in k Klassen auf.

(Quelle: Wikipedia)

---

Liniendiagramm und Zeitreihe

{{Grafik: Liniendiagramm und Zeitreihe nicht übertragen}}

Das Liniendiagramm stellt häufig einen zeitlichen Verlauf dar und findet bei metrischen Merkmalen Anwendung.

Einzelne Datenpunkte werden zur Erhöhung der Deutlichkeit durch gerade Linien verbunden.\||

---

j-216

+++Beispiel 7.6: |B|

Stromverbrauch - verschiedene Diagramme

Der Stromverbrauch soll durch drei verschiedene Diagramme dargestellt werden:

{{Grafik: Stromverbrauch in Millionen Kilowattstunden

{{Tabelle aufgelöst}}

Haushalt:

2005: 12987

2007: 13150

2010: 13112

---

Gewerbe:

2005: 7322

2007: 6503

2010: 6561

---

Landwirtschaft:

2005: 1523

2007: 1500

2010: 1450

---

Industrie:

2005: 20132

2007: 21105

2010: 22050

---

Öffentliche Anleger:

2005: 4800

2007: 4950

2010: 5150

---

Verkehr:

2005: 3299

2007: 3230

2010: 3402

---

Eigenverbrauch:

2005: 3342

2007: 3250

2010: 3310

---

Verluste:

2005: 2950

2007: 2850

2010: 3010

---

Gesamtverbrauch:

2005: 56355

2007: 56538

2010: 58045

---}}

{{Grafik: Kreisdiagramm: Stromverbrauch 2010

Haushalt: 22,59 %

Gewerbe: 11,30 %

Landwirtschaft: 2,50 %

Industrie: 37,99 %

Öffentliche Anlagen: 8,87 %

Verkehr: 5,86 %

Eigenverbrauch: 5,70 %

Verluste: 5,19 %}}

{{Grafik: Punktdiagramm nicht übertragen}}

{{Grafik: Säulendiagramm nicht übertragen}}

-----

##### Klasseneinteilung

Ist die Urliste umfangreich oder handelt es sich um ein stetiges Merkmal, so ist es vorteilhaft, die Daten in k Klassen einzuteilen.

##### Faustregeln für die Klasseneinteilung

||-) Wenn möglich, gleiche Klassenbreite 'De x wählen.

-) Die Klassenmitten x\_i als Vertreter der Klassen sollen möglichst einfache Zahlen sein.

-) Für die Anzahl k der Klassen gilt die Faustregel:

n <=30: k =5

30 <n <400: k ~~'w(n)

n >=400: k =20

Klassenbreite 'De x ~~(größter Wert -kleinster Wert)/(Anzahl der Klassen)\||

---

j-217

+++Beispiel 7.7: |C, D|

Klasseneinteilung

Gegeben ist die Urliste für die erreichte Punktezahl eines Tests:

16; 24; 35; 28; 60; 61; 36; 45; 41; 32; 35; 64; 39; 43; 26; 19; 29; 31; 28; 62; 48; 19; 34; 29; 48; 37; 22; 39; 21; 23; 34; 50; 57; 32; 40; 34; 24; 31; 40; 57; 53; 20; 29; 33; 48; 56; 42; 46; 27; 35;

Diese Daten wurden in zwei Diagrammen dargestellt.

Beschreiben Sie die beiden Diagramme.

Vergleichen Sie die beiden Diagramme bezüglich ihres Informationsgehalts.

{{Grafik: Säulendiagramm und Histogramm nicht übertragen}}

Lösung:

Die Höhe der Säulen gibt die jeweilige absolute Häufigkeit f\_i der erreichten Punkte an.

Die Grafik enthält die gesamte, in der Urliste gesammelte Information, ist aber unübersichtlich.

Die erste Klasse beginnt bei 15, und die Klassenbreite 'De x ist 10.

Die Höhe der Säulen gibt die zugehörige Häufigkeit f\_i jeder Klasse an. Die Klassenmitten ersetzen in Berechnungen die einzelnen Daten in den jeweiligen Klassen. Die Grafik gewinnt an Übersicht, verliert aber viel an Information.

|!|: Man kann (leider) nicht beides haben.

Mehr Übersichtlichkeit erreicht man durch weniger Klassen, verliert aber dadurch Information:

{{Grafik: Klassen: viele; Übersicht: gering; Information: hoch

Klassen: wenige; Übersicht hoch; Information: gering}}

-----

##### Übungsaufgaben

+++7.005 |B|

Untersuchen Sie das Ergebnis Ihrer letzten Schularbeit

a) aus Mathematik und

b) aus Englisch,

indem Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Tabelle zusammenstellen und diese Funktionen grafisch darstellen.

-) Stellen Sie dabei die absoluten Häufigkeiten als Säulendiagramm, als Stab- und als Liniendiagramm dar.

-) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten als Kreisdiagramm dar.

**[]**

-----

+++7.006 |B|

Stellen Sie einige Daten der unter "Worum geht's hier?" vorgestellten Kundenbefragung mittels geeigneter Diagramme dar.

{{Tabellen aufgelöst}}

Frage 1:

Geschlecht: männlich; Anzahl: 125

Geschlecht: weiblich; Anzahl: 179

Summe: 304

---

Frage 2:

Alter: [0; 20[; Anzahl: 51

Alter: [20; 40[; Anzahl: 124

Alter: [40; 60[; Anzahl: 95

Alter: [60; 80[; Anzahl: 34

---

Frage 3:

Wohnbezirk: E (Eisenstadt-Stadt); Anzahl: 111

Wohnbezirk: EU (Eisenstadt-Umg.); Anzahl: 145

Wohnbezirk: MA (Mattersburg); Anzahl: 31

Wohnbezirk: ND (Neusiedl); Anzahl: 15

Wohnbezirk: Sonstige; Anzahl: 2

---

Frage 4:

Familiennettoeinkommen in €: [0,00; 2000,00[; Anzahl: 126

Familiennettoeinkommen in €: [2000,00; 4000,00[; Anzahl: 148

Familiennettoeinkommen in €: [4000,00; 6000,00[; Anzahl: 30

---

**[]**

-----

|T|: Die bisherigen zentralen Begriffe und Größen und deren Zusammenhang:

n Umfang der Datenreihe

f\_i absolute Häufigkeit

h\_i relative Häufigkeit

'Si[i =1; k](f\_i) =n

'Si[i =1; k](h\_i) =1

j-218

+++7.007 |A, B, C|

In einem Internetcafe wurde die Verbindungsdauer von 20 Kunden In Minuten mit dem Internet protokolliert und in folgender Urliste dargestellt.

24; 32; 21; 18; 50; 4; 15; 26; 12; 8; 25; 54; 58; 47; 34; 46; 25; 24; 33; 5

a.)

Ermitteln Sie aus der Urliste, wie viele der 20 Kunden mehr als 30 Minuten im Internet gesurft haben.

**[]**

---

b.)

Bestimmen Sie aus der Urliste, wie viele der 20 Kunden bis zu inkl. 40 Minuten im Internet gesurft haben.

**[]**

---

c.)

Teilen Sie die gegebenen Werte in 6 Klassen mit einer Klassenbreite von 10 Minuten ein. Beginnen Sie die erste Klasse mit dem Wert 0.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie die Häufigkeitsfunktion tabellarisch und grafisch.

**[]**

---

e.)

Geben Sie an, wie viele Klassen k und welche Klassenbreite 'De x sich aus den oben vorgestellten Faustregeln für die Klasseneinteilung ergeben.

**[]**

-----

+++7.008 |B|

Von 200 Verkehrsunfällen wurden durch

-) Überholen: 40 Unfälle

-) Nichtbeachten der Vorfahrt: 30 Unfälle

-) falsches Abbiegen: 50 Unfälle

-) zu hohe Geschwindigkeit: 60 Unfälle

-) Sonstiges: 20 Unfälle

verursacht.

Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung durch ein Säulen- und ein Balkendiagramm dar.

**[]**

-----

+++7.009 |C, D|

Ein Unternehmen hat folgende Gewinne (in Mio. Euro) erzielt:

Jahr: 2010; Gewinn: 53

Jahr: 2011; Gewinn: 55

Jahr: 2012; Gewinn: 60

Jahr: 2013; Gewinn: 62

Jahr: 2014; Gewinn: 66

Jahr: 2015; Gewinn: 67

a.)

Erklären Sie, wie die Gewinnentwicklung in den drei Diagrammen jeweils dargestellt wird (Diagramm 1 ist in der Randspalte):

{{Grafik: Diagramm 1, Diagramm 2 und Diagramm 3 nicht übertragen}}

**[]**

---

b.)

Beschreiben Sie, welcher Eindruck jeweils durch die Diagramme erzeugt wird.

**[]**

---

c.)

Beurteilen Sie, welches Diagramm die Gewinnentwicklung "richtig" darstellt.

**[]**

-----

{{Grafik: Logo Statistik Austria}}

Aufgabe der Statistik Austria ist die Erhebung und Bereitstellung statistischer Informationen für alle Bürger. Viele Daten der Statistik Austria werden über die Homepage www.statistik.at kostenlos zur Verfügung gestellt.

+++7.010 |A|

Die Bundesanstalt "Statistik Austria" erstellt Statistiken, die öffentlich zur Verfügung gestellt werden. Zur Mobilität der privaten Haushalte wird regelmäßig erhoben, wie viele Pkws es in Österreich pro Haushalt gibt.

Für 2014/2015 ergaben sich folgende Werte (Quelle: www.statistik.at): 23 % der Haushalte haben keinen Pkw, 50 % haben einen Pkw, 21 % haben zwei Pkws und 6 % haben drei Pkws (genauer: "drei oder mehr").

Stellen Sie die Daten in einer Häufigkeitstabelle dar.

**[]**

-----

j-219

## !!7.3 Mittelwerte

Tabellen oder grafische Darstellungen können Häufigkeitsverteilungen zwar veranschaulichen, reichen aber für schnelle Vergleiche verschiedener Häufigkeitsverteilungen meist nicht aus.

Dazu benötigt man Kennzahlen, die wesentliche Eigenschaften der Verteilungen angeben. Mittelwerte sind Zentralmaße und erlauben mithilfe einer einzigen Zahl eine rasche (erste) Charakterisierung einer Datenreihe.

|T|: Mittelwerte werden auch als Zentralmaße bezeichnet.

##### Arithmetisches Mittel

+++Beispiel 7.8: |B|

Mittlere Haushaltsgröße 1 (Fortsetzung von Beispiel 7.4)

In einem Wohnblock mit 20 Haushalten wird die Anzahl der im Haushalt lebenden Personen erhoben.

Es ergeben sich folgende Werte (Urliste):

2; 3; 5; 4; 6; 2; 2; 6; 2; 2; 2; 3; 1; 3; 3; 4; 3; 1; 7; 4

Berechnen Sie die mittlere Haushaltsgröße.

Lösung:

Um die mittlere Haushaltsgröße zu erhalten, addieren Sie alle Werte der Urliste und dividieren diese Summe durch die Anzahl der Haushalte:

Mittlere Haushaltsgröße

x^- =(2 +3 +5 +4 +... +1 +7 +4)/(20) =(65)/(20) =3,25

Durchschnittlich leben also 3,25 Personen in einem Haushalt des untersuchten Wohnblocks.

-----

##### Definition: Einfaches arithmetisches Mittel

||Für eine Datenreihe vom Umfang n mit den Merkmalwerten s\_1, x\_2, ..., x\_n heißt x^- =(x\_1 +x\_2 +... +x\_n)/n =1/n \*'Si[i =1; n](x\_i) das zugehörige einfache arithmetische Mittel.\||

---

Statt "arithmetisches Mittel" wird oft auch nur "Mittelwert" geschrieben, wenn eine Verwechslung mit anderen Zentralmaßen (Median und Modus) ausgeschlossen ist.

---

Die Berechnung kann auch kürzer durchgeführt werden, wenn man gleiche Merkmalwerte zusammenfasst.

+++Beispiel 7.9: |B|

Mittlere Haushaltsgröße 2

Die Tabelle gibt die Haushaltsgröße der 20 Haushalte in einem Wohnblock (vergleiche Beispiel 7.4) an.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

{{Tabelle aufgelöst}}

i: 1

x\_i: 1

f\_i: 2

h\_i: 0,1

---

i: 2

x\_i: 2

f\_i: 6

h\_i: 0,3

---

i: 3

x\_i: 3

f\_i: 5

h\_i: 0,25

---

i: 4

x\_i: 4

f\_i: 3

h\_i: 0,15

---

i: 5

x\_i: 5

f\_i: 1

h\_i: 0,05

---

i: 6

x\_i: 6

f\_i: 2

h\_i: 0,1

---

i: 7

x\_i: 7

f\_i: 1

h\_i: 0,05

---

Summe f\_i: 20

Summe h\_i: 1

---

Berechnen Sie die mittlere Haushaltsgröße mit absoluten Häufigkeiten:

Mittlere Haushaltsgröße x^- =(1 \*2 +2 \*6 +3 \*5 +4 \*3 +5 \*1 +6 \*2 +7 \*1)/(20) =(65)/(20) =3,25

Berechnen Sie die mittlere Haushaltsgröße mit relativen Häufigkeiten:

x^- =1 \*0,1 +2 \*0,3 +3 \*0,25 +4 \*0,15 +5 \*0,05 +6 \*0,1 +7 \*0,05 =3,25

-----

|T|: Zwei gleichwertige Möglichkeiten der Berechnung des arithmetischen Mittels:

-) Alle Werte werden einzeln addiert und

-) gleiche Werte werden über ihre absoluten oder relativen Häufigkeiten zusammengefasst.

j-220

##### Definition: Gewogenes arithmetisches Mittel

||Für eine Datenreihe vom Umfang n mit k verschiedenen Merkmalwerten x\_1, x\_2, ..., x\_k, die mit den absoluten Häufigkeiten f\_1, f\_2, ..., f\_k bzw. den relativen Häufigkeiten h\_1, h\_2, ..., h\_k auftreten, heißt

x^- =(f\_1 \*x\_1 +f\_2 \*x\_2 +... +f\_k \*x\_k)/n =1/n \*'Si[i =1; k](f\_i \*x\_i) bzw.

x^- =h\_1 \*x\_1 +h\_2 \*x\_2 +... +h\_k \*x\_k ='Si[i =1; k](h\_i \*x\_i)

das zugehörige gewogene arithmetische Mittel.\||

---

|T|: Beim gewogenen arithmetischen Mittel werden gleiche Werte über ihre absoluten oder relativen Häufigkeiten zusammengefasst.

---

Für k =n entspricht das gewogene arithmetische Mittel dem einfachen arithmetischen Mittel.

+++Beispiel 7.10: |B|

Schmerzstillendes Medikament - mittlere Packungsgröße

Ein schmerzstillendes Medikament wird in Packungen zu 10, 20, 30 und 40 Tabletten pro Packung verkauft. Die Häufigkeitstabelle für 100 verkaufte Packungen wurde mit Spalten für x\_i \*h\_i und x\_i \*f\_i ergänzt.

Ermitteln Sie, wie viele Tabletten im Durchschnitt pro Packung verkauft wurden und skizzieren Sie in einem dazugehörigen Säulendiagramm für die relativen Häufigkeiten eine Parallele zur y-Achse an der Stelle des Mittelwertes x^-.

{{Tabelle aufgelöst}}

i: 1

x\_i: 10

f\_i: 4

h\_i: 0,04

x\_i \*h\_i: 0,4

x\_i \*f\_i: 40

---

i: 2

x\_i: 20

f\_i: 37

h\_i: 0,37

x\_i \*h\_i: 7,4

x\_i \*f\_i: 740

---

i: 3

x\_i: 30

f\_i: 40

h\_i: 0,40

x\_i \*h\_i: 12,0

x\_i \*f\_i: 1200

---

i: 4

x\_i: 40

f\_i: 19

h\_i: 0,19

x\_i \*h\_i: 7,6

x\_i \*f\_i: 760

---

Summe x\_i: 100

Summe h\_i: 1,00

Summe x\_i \*h\_i: x^- =27,4

Summe x\_i \*f\_i: 2740; x^- =2740 /100 =27,4

---

Mit den 100 Packungen wurden insgesamt 2 740 Tabletten verkauft. Damit wurden pro Packung im Mittel 27,4 Tabletten verkauft.

Die Tabelle enthält in den letzten beiden Spalten die Realisierung der beiden

Definitionen: x^- ='Si[i =1; k](x\_i \*h\_i) und x^- =1/n \*'Si[i =1; n](x\_i \*f\_i) des gewogenen arithmetischen Mittels für die gegebene Datenreihe.

{{Grafik: Säulendiagramm nicht übertragen}}

-----

Damit das arithmetische Mittel berechnet werden kann, müssen die Daten metrisch (intervall- oder verhältnisskaliert) sein.

j-221

##### Eigenschaften des arithmetischen Mittels

||-) Die Summe der Abweichungen der Merkmalwerte x\_i von ihrem arithmetischen Mittel x ist null: 'Si[i =1; n](x\_i -x^-) =0

-) Das n-Fache des arithmetischen Mittels ergibt die Summe der Stichprobenwerte: n \*x^- ='Si[i =1; n](x\_i)

-) Geometrisch interpretiert liegt das arithmetische Mittel auf der lotrechten Schwerlinie im zugehörigen Stab-/Säulendiagramm oder auf der lotrechten Schwerlinie der vom Polygonzug begrenzten Fläche.

-) Extrem abweichende Daten (Ausreißer) beeinflussen das arithmetische Mittel erheblich. Im Falle von Ausreißern kann es vorkommen, dass das arithmetische Mittel die gegebenen Daten nicht mehr geeignet repräsentiert.\||

---

Datenreihe: 2; 3; 7

n =3, x^- =4

{{Grafik: nicht übertragen}}

##### Median

+++Beispiel 7.11: |B, C|

Fünf Landwirte - mittlere Zahl der Kühe

In einer kleinen Ortschaft leben fünf Landwirte. Vier von diesen Landwirten haben je zwei Kühe, der fünfte aber hat 242 Kühe im Stall.

Ein Ausreißer - der Großbauer mit den 242 Kühen - dominiert die durchschnittliche Anzahl x^- der Kühe.

a.)

Berechnet man als durchschnittliche Anzahl der Kühe das arithmetische Mittel der Zahl der Kühe pro Landwirt, so erhält man:

x^- =(2 +2 +2 +2 +242)/5 =(250)/5 =50

Im Durchschnitt hat jeder der fünf Landwirte 50 Kühe im Stall. Dies gibt aber keineswegs die Verteilung des Viehbestandes wieder.

---

b.)

Eine weitere Möglichkeit, einen "Mittelwert" zu berechnen, ist, die der Größe nach geordnete Zahl der Kühe pro Landwirt aufzuschreiben und daraus den zentralen Wert zu nehmen: 2; 2; 2; 2; 242

Dieser Wert ist 2 und heißt Median. Er repräsentiert die Verteilung dieses Viehbestandes besser als das arithmetische Mittel.

-----

##### Definition: Median

||Der Median einer der Größe nach geordneten Datenreihe ist

-) bei ungerader Anzahl der Daten der Wert in der Mitte,

-) bei gerader Anzahl der Daten das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte.\||

---

medius: lateinisch für der Mittlere, mitten, in der Mitte

+++Beispiel 7.12: |B|

Median

a.)

2; 3; 3; 4; 4; 5; 6; 7; 8

n =9

Median =x\_5 =4

---

b:)

2; 3; 3; 4; 4 | 5; 6; 7; 8; 8

n =10

Median =(x\_5 +x\_6)/2 =(4 +5)/2 =4,5

-----

Der Median kann für ordinale und metrische Daten berechnet werden, nicht aber für nominalskalierte Daten.

##### Eigenschaften des Medians

||-) Der Median wird durch einzelne stark abweichende Werte (Ausreißer) kaum beeinflusst.

-) Der Median teilt eine der Größe nach geordnete Datenreihe in zwei gleich große Teile.

-) Mindestens 50 % der Daten sind kleiner oder gleich dem Median und zugleich sind mindestens 50 % der Daten größer oder gleich dem Median.\||

---

j-222

Die Senkrechte auf die x-Achse an der Stelle des Medians teilt das zugehörige Histogramm in zwei flächengleiche Teile.

Der Median trennt also die Gesamtmenge der gegebenen Daten in zwei gleich große Hälften.

Bisherige Mittelwerte:

-) arithmetisches Mittel und

-) Median

+++Beispiel 7.13: |B, C|

Median und arithmetisches Mittel (Forts. von 7.4 und 7.10)

Haushaltsgröße:

Mittelwert x^- =3,25

Median =3

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

Tabletten: Mittelwert x^- =27,4

Median =30

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

Im ersten Fall ist der Median kleiner, im zweiten größer als das arithmetische Mittel.

-----

##### Modus

Ein weiterer Zentralwert ist der Modus, der angibt, welcher Datenwert am häufigsten vorkommt.

##### Definition: Modus oder Modalwert

||Der Modus einer Datenreihe ist der Wert mit der größten Häufigkeit.\||

---

modus: lateinisch für Maß, Maßstab, Größe, Art, Weise

Der Modus kann für alle, insbesondere für nominalskalierte Merkmale verwendet werden.

Existieren für eine Datenreihe zwei Modalwerte, so heißt die Häufigkeitsverteilung bimodal.

Geometrisch interpretiert ist der Modus der x-Wert beim Maximum (bei den Maxima) der Häufigkeitskurve.

+++Beispiel 7.14: |B|

Modus oder Modalwert

a.)

2; 3; 4; 4; 6; 5; 4

Modus =4

(Der Wert 4 hat die größte Häufigkeit 3.)

---

b.)

2; 3; 4; 5; 6

Modus existiert nicht.

---

c.)

2; 3; 6; 4; 5; 6; 3

Es existieren zwei Modalwerte 3 und 6.

(Die Häufigkeit der Werte von 3 und 6 beträgt jeweils 2.)

---

Vergleich der Lage der drei Zentralmaße Modus, Median und arithmetisches Mittel im Säulendiagramm:

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

Modus: beim maximum (bei den Maxima) der Häufigkeitsverteilung

Median: zwei flächengleiche Teile

Arithmetisches Mittel: auf der lotrechten Schwerlinie

-----

j-223

+++Beispiel 7.15: |B, D|

Drei Zentralmaße

Gegeben ist die Datenreihe: 1; 2; 3; 4; 5; 2; 1; 6; 37; 2; 2; 2; 2

a.)

Berechnen Sie das arithmetisches Mittel, den Median und den Modus der Datenreihe. Erklären Sie den Unterschied dieser Kennzahlen.

---

b.)

Bei der Eingabe der Daten ist beim größten Wert ein Tippfehler passiert.

Statt 37 lautet der richtige Wert 7.

Erklären Sie, wie sich die Zentralmaße ändern, wenn die Daten richtig eingegeben werden.

---

Lösung:

a.)

Ordnen Sie zuerst die Daten der Größe nach:

1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 4; 5; 6; 37

Sie erhalten:

x^- ~~5,3

Median =2

Modus =2

Man beachte, dass der Median und der Modus durch den extremen Wert 37 hier nicht beeinflusst werden, während das beim arithmetischen Mittel der Fall ist.

---

b.)

Das arithmetische Mittel wird kleiner, weil die Summe der Datenwerte kleiner wird.

Der Median ändert sich nicht, weil 7 wie 37 in der oberen Hälfte der Datenreihe liegt.

Der Modus ändert sich auch nicht, weil die absolute Häufigkeit des Wertes 2 am größten bleibt.

-----

##### Geometrisches Mittel

+++Beispiel 7.16: |B|

Durchschnittliche Umsatzsteigerung

Im Jahr 2012 betrug der Umsatz eines Unternehmens 25 Millionen Euro.

In den folgenden vier Jahren ändert er sich, bezogen jeweils auf den Vorjahreswert, um 6 %, -4 %, 5 % und 8 %.

a.)

Berechnen Sie den Umsatz im Jahr 2016.

---

b.)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Umsatz in diesen vier Jahren insgesamt verändert hat.

---

c.)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Umsatz in diesen vier Jahren durchschnittlich pro Jahr verändert hat.

---

Lösung:

a.)

U\_(2016) =25 \*1,06 \*0,96 \*1,05 \*1,08 =25 \*1,154 =28,85

Der Umsatz im Jahr 2016 beträgt 28,85 Millionen Euro.

---

b.)

Aus U\_(2016) =U\_(2012) \*1,154 folgt, dass sich der Umsatz um 15,4 % erhöht hat.

----

c.)

U\_(2016) =U\_(2012) \*1,154 =U\_(2012) \*(1 +i)^4

1,154 =(1 +i)^4

'w[4](1,154) =1 +i =1,03645

In jedem dieser vier Jahre betrug die durchschnittliche prozentuelle Änderung 3,645 %.

-----

|V|: Vergleichen Sie das geometrische Mittel mit dem durchschnittlichen Zinssatz aus dem Bereich der Finanzmathematik.

##### Definition: Geometrisches Mittel

||Das geometrische Mittel einer Datenreihe für n positive Werte x\_i ist:

x^-\_g ='w[n](x\_1 \*x\_2 \*x\_3 \*... \*x\_n)\||

---

Die Werte x\_1, x\_2, x\_n sind meist Wachstumsfaktoren.

x\_1 =1 +i\_1

x\_2 =1 +i\_2

...

x\_n =1 +i\_n

##### Eigenschaften des geometrischen Mittels

||-) Das geometrische Mittel ist nur für positive Werte definiert.

-) Die Werte x\_i sind meist Zunahme- oder Abnahmefaktoren.

-) Das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.\||

---

j-224

##### Übungsaufgaben

Man hat behauptet, die Welt werde durch Zahlen regiert: Das aber weiß ich, dass die Zahlen uns belehren, ob sie gut oder schlecht regiert werde.

Johann Wolfgang von Goethe, 1749 bis 1832, deutscher Dichter

+++7.011 |B, D|

Die gerundeten Monatsgehälter von vier Beschäftigten betragen:

1600 Euro, 1700 Euro, 1750 Euro und 3200 Euro

a.)

Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Gehälter.

**[]**

---

b.)

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel die vier Monatsgehälter nicht gut repräsentiert.

**[]**

---

c.)

Erklären Sie, welches Zentralmaß besser geeignet wäre, um das Durchschnittsgehalt anzugeben.

**[]**

---

d.)

Ermitteln Sie dieses Zentralmaß und formulieren Sie einen vergleichenden Antwortsatz.

**[]**

-----

+++7.012 |B, D| Berechnen Sie für die vier Schularbeitenergebnisse verschiedener Klassen

{{Tabelle aufgelöst}}

Klasse: 4a

Anzahl 1: 2

Anzahl 2: 3

Anzahl 3: 7

Anzahl 4: 1

Anzahl 5: 5

---

Klasse: 4b

Anzahl 1: 3

Anzahl 2: 3

Anzahl 3: 3

Anzahl 4: 8

Anzahl 5: 3

---

Klasse: 4c

Anzahl 1: 6

Anzahl 2: 2

Anzahl 3: 6

Anzahl 4: 6

Anzahl 5: 4

---

Klasse: 4d

Anzahl 1: 2

Anzahl 2: 3

Anzahl 3: 7

Anzahl 4: 3

Anzahl 5: 5

---

a.)

alle Mittelwerte,

**[]**

---

b.)

die relative Häufigkeit in Prozent.

**[]**

---

|D|: Darf/sollte das arithmetische Mittel (Notendurchschnitt) für die Schularbeitsnoten verwendet werden?

**[]**

-----

+++7.013 |C, D|

{{Grafik: Zeitungsartikel:

Tirol bei Löhnen hinten! (Quelle: Tiroler Tageszeitung, 1. 9. 2009)

Laut einer Statistik des Hauptverbands der Sozialversicherungen beträgt das Durchschnittseinkommen der Tiroler Bevölkerung 2053 Euro brutto.

Was ist mit diesem Durchschnittseinkommen gemeint?

Handelt es sich dabei um das arithmetische Mittel aller Einkommen oder um den Median?

Tirol bei Löhnen hinten

Nur auf dem achten und damit vorletzten Platz landet Tirol laut der neuesten Einkommensstatistik.

Wien, Innsbruck - Laut der brandneuen Statistik des Hauptverbands der Sozialversicherung, die der TT exklusiv vorliegt, die Einkommen im Vorjahr trotz zumindest bis zum Sommer noch starker Konjunktur bundesweit nur relativ schwach um 1,9 auf durchschnittlich 154 Euro brutto pro Monat gestiegen. So schwach war die Lohnsteigerung zuletzt im Jahr 2005 gewesen.

Diese 2154 Euro sind ein Medianwert. 50 Prozent der fast 3,8 Millionen Beschäftigten verdienten mehr und 50 Prozent weniger. Eingerechnet sind Sonderzahlungen wie Weihnachts- und Urlaubsgeld, dividiert durch zwölf Monate.

2053 Euro für Tiroler

Die Tiroler verdienten laut Hauptverband im Durchschnitt 2053 Euro brutto im Monat, das ist der vorletzte Platz vor dem Burgenland (1859 Euro). Kärnten, das jahrelang zurücklag, liegt mit 2056 Euro knapp vor Tirol. Der Tiroler Lohnzuwachs lag mit nur 1,7 Prozent unter dem Bundesschnitt.

Vorarlberger in Führung

Die Tiroler verdienen nicht nur um 101 Euro brutto pro Monat weniger als der Bundesschnitt, sondern sogar um 205 Euro weniger als die Vorarlberger, die vor Wien und Oberösterreich die Bundesländer-Tabelle anführen.

Der Lohnrückstand ist seit Jahren Auslöser heftiger Debatten zwischen Politikern und Sozialpartnern, hat Tirol doch auch ein sehr hohes Preisniveau etwa in der Gastronomie, beim Wohnen oder bei Treibstoffen. Laut Wirtschaftskammer liegen die Gründe für das schlechte Abschneiden u. a. in der sehr klein strukturierten Tiroler Wirtschaft, dem relativ hohen Anteil an Arbeitern sowie jüngeren Beschäftigten. (v\_a)}}

**[]**

-----

+++7.014 |B, D|

In der Tabelle in der Randspalte finden Sie eine Aufstellung der Haushaltsgrößen der österreichischen Privathaushalte für das Jahr 2015.

Quelle. Statistik Austria

{{Grafik: Insgesamt 1000 Haushalte; Haushalte insgesamt: 3816,7

Haushaltsgröße: 1 Person: 1418,4

Haushaltsgröße: 2 Personen: 1141,2

Haushaltsgröße: 3 Personen: 574,0

Haushaltsgröße: 4 Personen: 444,9

Haushaltsgröße: 5 und mehr Personen: 238,2

Quelle. Statistik Austria}}

a.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Haushaltsgröße (arithmetisches Mittel).

**[]**

---

b.)

Die Statistik Austria gibt als durchschnittliche Haushaltsgröße 2,22 an. Argumentieren Sie, warum Ihr berechneter Wert geringfügig unter dem von der Statistik Austria angegebenen Wert liegt.

-----

+++7.015 |B|

Der Umsatz eines Betriebes ist in vier aufeinanderfolgenden Jahren jeweils gegenüber dem Vorjahr um 45 %, 110 %, 30 % bzw. 40 % gestiegen.

a.)

Berechnen Sie die gesamte Umsatzsteigerung.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche prozentuelle Umsatzsteigerung.

**[]**

-----

j-225

+++7.016 |B, D|

Ein IT-Betrieb hat in den letzten vier Jahren folgende Umsatzänderungen (jeweils gegenüber dem Vorjahr) erzielt:

-) im 1. Jahr +25 %

-) Im 2. Jahr ist der Umsatz gleich geblieben.

-) im 3. Jahr -30 %

-) im 4. Jahr +5 %

Die Geschäftsführerin stöhnt: "Jetzt sind wir wieder dort, wo wir angefangen haben."

a.)

Erklären Sie, mit welchem Mittelwert die Geschäftsführerin rechnet.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die gesamte Umsatzänderung für die letzten 4 Jahre.

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche prozentuelle Umsatzänderung.

**[]**

-----

+++7.017 |A, B, C, D|

Ein Investor kauft eine Aktie zum Kurs 320.

Nach einem Jahr beträgt der Kurs 400, nach zwei Jahren 320.

a.)

Interpretieren Sie folgende Rechnungen im Sachzusammenhang:

(400)/(320) =1,25;

(320)/(400) =0,8

**[]**

---

b.)

Der Investor will durch folgende Rechnung die durchschnittliche Rendite ermitteln:

(25 % +(-20 %))/2 =2, %

Erklären und beurteilen Sie die Vorgangsweise des Investors.

**[]**

---

c.)

Stellen Sie eine richtige Rechnung zur Ermittlung der durchschnittlichen jährlichen Rendite auf.

**[]**

-----

+++7.018 |B, D|

Ein Unternehmer zieht Bilanz:

"Unser Gewinn ist im Jahr 2014 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2015 stieg der Gewinn nochmals um 10 %. Also konnten wir unseren Gewinn in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % steigern."

a.)

Argumentieren Sie, warum diese Analyse der Gewinnsteigerung nicht richtig ist.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die richtige Gewinnsteigerung.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie die durchschnittliche jährliche prozentuelle Gewinnsteigerung.

**[]**

-----

+++7.019 |B, C|

Der Pkw-Bestand ist in Österreich von 2991284 Fahrzeugen im Jahr 1990 auf 4156743 Fahrzeuge im Jahr 2005 gestiegen.

(Quelle: Statistik Austria)

a.)

Interpretieren Sie folgende Rechnung im Sachzusammenhang:

(4156743)/(2991284) ~~1,39

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie für den Pkw-Bestand den durchschnittlichen jährlichen prozentuellen Zuwachs für den Zeitraum von 1990 bis 2005.

**[]**

---

Im Jahr 2015 betrug der Pkw-Bestand in Österreich 4748048 Fahrzeuge.

c.)

Ermitteln Sie den durchschnittlichen jährlichen prozentuellen Zuwachs für den Zeitraum 2005 bis 2015.

**[]**

-----

j-226

## !!7.4 Streuungsmaße

Streuungsmaße dienen zur genaueren Beschreibung einer Häufigkeitsverteilung.

|!|: Der Mittelwert einer Daten reihe hat dieselbe Einheit wie die Daten dieser Datenreihe.

+++Beispiel 7.17: |B|

Streuung - Masse von Paketen

In der Paketabteilung eines Postamts wird dreimal die Masse (in kg) von je 5 Paketen ermittelt. Es ergeben sich die geordneten Datenreihen:

(1) 2,9; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1

(2) 2,6; 2,8; 2,9; 3,2; 3,5

(3) 0,4; 2,0; 3,0; 3,8; 5,8

Alle Datenreihen haben das arithmetische Mittel x^- =3 kg.

Die drei Datenreihen unterscheiden sich aber wesentlich in ihrer "Streuung".

Dies erkennt man sofort, wenn man die absoluten Häufigkeiten als Stabdiagramm darstellt.

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

-----

Es ist somit notwendig, neben dem Mittelwert zumindest noch eine weitere Kennzahl für die Streuung der Daten einzuführen, um eine Datenreihe genauer beschreiben/charakterisieren zu können.

Das Ausmaß, in welchem numerische Daten von einem Durchschnittswert abweichen, nennt man Streuungsmaß.

Die bekanntesten Streuungsmaße sind

-) die Spannweite sowie

-) die Varianz und die daraus gewonnene Standardabweichung.

+++Beispiel 7.18: |B|

Spannweite (Fortsetzung von Beispiel 7.17)

Berechnen Sie die Spannweiten für die Datenreihen des vorhergehenden Beispiels.

(1) 2,9; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1;

R =3,1 -2,9 =0,2

(2) 2,6; 2,8; 2,9; 3,2; 3,5;

R =3,5 -2,6 =0,9

(3) 0,4; 2,0; 3,0; 3,8; 5,8;

R =5,8 -0,4 =5,4

Die Datenreihe (3) hat die größte Spannweite mit 5,4 kg.

-----

R: von englisch Range

##### Definition: Spannweite

||Die Spannweite R einer Datenreihe x\_1, x\_2, x\_3; ...; x\_n ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert einer Datenreihe.\||

---

Die Spannweite berücksichtigt nur zwei Werte der Datenreihe - den kleinsten und den größten Wert - und vernachlässigt daher viel Information. Zudem können diese Maximal- und Minimalwerte Ausreißer und damit für die Verteilung untypisch sein.

Man braucht ein Streuungsmaß, das alle Daten berücksichtigt. Die Varianz und die daraus gewonnene Standardabweichung tun das.

j-227

##### Varianz und Standardabweichung

Eine erste Idee, einfach das arithmetische Mittel aller Abweichungen vom arithmetischen Mittel einer Datenreihe, also 1/n \*'Si[i =1; n](x\_i -x^-) als Streuungsmaß zu verwenden, ist ungeeignet, da die Summe dieser Abweichungen null ergibt. Positive und negative Abweichungen heben einander auf: 'Si[i =1; n](x\_i -x^-) =0

Es gibt mehrere Möglichkeiten, negative Abweichungen vom arithmetischen Mittel "auszuschalten".

-) Durch den Betrag der Abweichungen:

Mittlerer Betrag der Abweichungen =1/n \*'Si[i =1; n](|x\_i -x^-|)

Durch das Quadrat der Abweichungen:

Mittleres Quadrat der Abweichungen =1/n \*'Si[i =1; n]((x\_i -x^-)^2)

n i =1 i

In der beschreibenden Statistik wird vor allem das durchschnittliche Quadrat der Abweichungen (die mittlere quadratische Abweichung) als Streumaß verwendet.

Diese Größe heißt empirische Varianz s^2.

---

|!|: Jeder gerade Exponent macht aus negativen Zahlen positive Potenzen: (-a)^(2n) >0

##### Definition: Empirische Varianz

||Die n-gewichtete Varianz oder empirische Varianz s^2 ist das arithmetische Mittel der Abweichungsquadrate der Merkmalwerte x\_1, x\_2, x\_3, ..., x\_n von ihrem arithmetischen Mittel x^-.

n ist der Umfang der Datenreihe.

s^2 =1/n \*'Si[i =1; n]((x\_i -x^-)^2) empirische Varianz

{{ZI: (x\_i -x^-)^2 quadratische Abweichung

1/n \*'Si[i =1; n]((x\_i -x^-)^2) mittlere quadratische Abweichung}}

{x\_1, x\_2, x\_3, ..., x\_k}

Menge der Merkmalwerte mit den absoluten Häufigkeiten f\_1, f\_2, ..., f\_k und den relativen Häufigkeiten h\_1, h\_2, ..., h\_k mit h\_i =(f\_i)/n, für k <=n

s^2 =1/n \*'Si[i =1; k](f\_i \*(x\_i -x^-)^2) ='Si[i =1; k](h\_i \*(x\_i -x^-)^2)\||

---

|V|: Wie bei der Berechnung des arithmetischen Mittels gibt es auch hier zwei gleichwertige Möglichkeiten:

-) Alle Werte werden einzeln betrachtet.

-) Gleiche Werte werden über ihre absoluten oder relativen Häufigkeiten zusammengefasst.

+++Beispiel 7.19: |B|

Empirische Varianz (Fortsetzung von Beispiel 7.17)

Für die Paketmassen haben Sie das arithmetische Mittel 3 kg erhalten. Berechnen Sie die empirische Varianz s2 für diese Datenreihen.

(1) 2,9; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1:

s^2 =1/5 \*((2,9 -3)^2 +(3 -3)^2 +(3 -3)^2 +(3 -3)^2 +(3,1 -3)^2) =0,004

(2) 2,6; 2,8; 2,9; 3,2; 3,5:

s^2 =1/5 \*((2,6 -3)^2 +(2,8 -3)^2 +(2,9 -3)^2 +(3,2 -3)^2 +(3,5 -3)^2) =0,1

(3) 0,4; 2,0; 3,0; 3,8; 5,8:

s^2 =1/5 \*((0,4 -3)^2 +(2 -3)^2 +(3 -3)^2 +(3,8 -3)^2 +(5,8 -3)^2) =3,248

Die Datenreihe (3) hat damit die größte Varianz von 3,248 kg^2.

-----

Anmerkung:

Neben der n-gewichteten Varianz gibt es noch die (n -1)-gewichtete Stichprobenvarianz. Diese wird in der schließenden Statistik verwendet, wenn man von der Varianz einer Stichprobe auf die Varianz der Grundgesamtheit schließt.

s^2\_(n -1) =1/(n -1) \*'Si[i =1; n]((x\_i -x^-)^2)

(n -1)-gewichtete Varianz

|T|:

Wieder gilt, dass der Name für sich spricht. Bei der n-gewichteten Varianz wird die Summe der Abweichungsquadrate durch n, bei der (n -1)-gewichteten durch (n -1) dividiert.

|!|: Stets ist s\_n^2 <s\_(n -1)^2 und s\_n <s\_(n -1).

j-228

Wird aus der Varianz die Wurzel gezogen, erhält man die Standardabweichung.

##### Definition: Standardabweichung

||Für eine Datenreihe mit der Varianz s^2 heißt s ='w(s^2) empirische Standardabweichung der Datenreihe.\||

---

Für große n gilt: s^2 ~~s\_(n -1)^2

Durch das Quadrieren ist die Einheit der Varianz gleich dem Quadrat der Maßeinheit der Datenwerte. Durch das Wurzelziehen stimmt die Einheit der Standardabweichung wieder mit der Einheit der Datenwerte überein.

Es gilt:

s <s\_(n -1)

s^2 population variance

s\_(n-1)^2 sample variance

|T|: Wird aus der empirischen Varianz die Wurzel gezogen, so erhält man die empirische Standardabweichung.

|T|: Meist verwendet man statt empirischer Varianz nur Varianz und statt empirischer Standardabweichung nur kurz Standardabweichung.

---

+++Beispiel 7.20: |B|

Empirische Standardabweichung (Fortsetzung von Beispiel 7.17)

Berechnen Sie die empirische Standardabweichung für die Datenreihen der Paketmassen in kg:

(1) s ='w(0,004) ~~0,063

(2) s ='w(0,1) ~~0,316

(3) s ='w(3,248) ~~1,802

Die Datenreihe (3) hat damit die größte Standardabweichung von etwa 1,802 kg, was nicht überrascht, weil sie auch die größte Varianz hat.

-----

+++Beispiel 7.21: |A, B|

Varianz und Standardabweichung (Fortsetzung von Beispiel 7.9)

In einem Wohnblock wird die Haushaltsgröße von 20 Haushalten erhoben. Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung der Zahl der Personen pro Haushalt.

{{Tabelle aufgelöst}}

i: 1

x\_i: 1

f\_i: 2

h\_i: 0,10

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,5036

---

i: 2

x\_i: 2

f\_i: 6

h\_i: 0,30

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,4688

---

i: 3

x\_i: 3

f\_i: 5

h\_i: 0,25

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,0156

---

i: 4

x\_i: 4

f\_i: 3

h\_i: 0,15

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,0844

---

i: 5

x\_i: 5

f\_i: 1

h\_i: 0,05

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,1531

---

i: 6

x\_i: 6

f\_i: 2

h\_i: 0,10

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,7563

---

i: 7

x\_i: 7

f\_i: 1

h\_i: 0,05

(x\_i -x^-)^2 \*h\_i: 0,7031

---

Summe f\_i: 20

Summe h\_i: 1

Summe (x\_i -x^-)^2 \*h\_i: s^2 =2,6875

---

s ~~1,6394

Die mittlere Haushaltsgröße der 20 Haushalte ist 3,25 Personen mit einer Standardabweichung von etwa 1,64 Personen.

Grafische Darstellung:

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

Die Werte x^- -s und x^- +s werden durch senkrechte Linien im Häufigkeitsdiagramm dargestellt.

-----

j-229

+++Beispiel 7.22: |A, B|

Veranschaulichung der Standardabweichung

Für drei verschiedene Datensätze sind in das zugehörige Histogramm der relativen Häufigkeiten drei lotrechte Strecken eingezeichnet: eine beim arithmetischen Mittel x^-, eine bei x^- -s und eine bei x^- +s.

{{Grafik: Diagramme nicht übertragen}}

x =4,15

s ~~0,853

x =3,95

s ~~1,431

x =4,1

s ~~1,9975

Die Standardabweichung s ist umso größer, je mehr die Beobachtungswerte streuen.

-----

|!|: Das aus dem arithmetischen Mittel x und der Standardabweichung s einer Datenreihe gebildete Intervall [x^- -s; x^- +s] nennt man einfaches Streuintervall und [x^- -2s; x^- +2s] doppeltes Streuintervall.

Wenn eine Datenreihe durch ihr arithmetisches Mittel und ihre Standardabweichung charakterisiert wird, weiß man schon "relativ viel" über die Datenreihe.

##### Interpretation der Standardabweichung

||Bei umfangreichen, annähernd "normalverteilten" Datenmengen gilt:

-) Etwa 68 % der Werte liegen im einfachen Streuintervall [x^- -s; x^- +s].

-) Etwa 95 % der Werte liegen im doppelten Streuintervall [x^- -2s; x^- +2s].\||

---

|V|: Mit der Normalverteilung werden Sie sieh im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch sehr ausführlieh beschäftigen.

+++Beispiel 7.23: |A, B|

Körpergröße

Die Körpergröße einer Population sei normalverteilt mit dem arithmetischen Mittel x^- =170 cm und der Standardabweichung s =10 cm (fiktive Daten!).

Dann sind ca. 68 % der Population zwischen 160 und 180 cm groß. Das heißt, bei einer Stichprobe von 2000 Personen haben ca. 1360 eine Körpergröße zwischen 160 und 180 cm.

Ca. 95 % der Population sind zwischen 150 und 190 cm groß, d. h., bei einer Stichprobe von 2000 Personen haben ca. 1900 eine Körpergröße zwischen 150 und 190 cm.

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

Speziell gilt für ein arithmetisches Mittel von 170 cm und eine Standardabweichung von 10 cm:

Etwa 68 % sind zwischen 160 und 180 cm groß.

Etwa 95 % sind zwischen 150 und 190 cm groß.

-----

|T|: Allgemein gilt für annähernd normalverteilte Daten mit dem arithmetischen Mittel x und der Standardabweichung s:

Etwa 68 % der Werte liegen zwischen x^- -s und x^- +s.

Etwa 95 % der Werte liegen zwischen x^- -2s und x^- +2s.

j-230

##### Übungsaufgaben

+++7.020 |A, B|

In einer Schulklasse wurden die Zähne von 10 Kindern auf Kariesbefall untersucht:

{{Tabelle aufgelöst}}

Kind Nr: 1

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 0

---

Kind Nr: 2

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

---

Kind Nr: 3

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

---

Kind Nr: 4

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 2

---

Kind Nr: 5

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 2

---

Kind Nr: 6

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

---

Kind Nr: 7

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 0

---

Kind Nr: 8

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 4

---

Kind Nr: 9

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

---

Kind Nr: 10

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

---

Kind Nr. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall 0 1 1 2 2 1 0 4 1 1

a.)

Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle für die Anzahl der vom Karies befallenen Zähne.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie arithmetisches Mittel, Varianz und Standardabweichung.

**[]**

---

+++7.021 |A, B|

Die Kinder einer Schulklasse werden auf den Kariesbefall ihrer Zähne untersucht:

{{Tabelle aufgelöst}}

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 0

Anzahl der Kinder: 4

---

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 1

Anzahl der Kinder: 7

---

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 2

Anzahl der Kinder: 5

---

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 3

Anzahl der Kinder: 3

---

Anzahl der Zähne mit Kariesbefall: 4

Anzahl der Kinder: 1

---

a.)

Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung grafisch dar.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie arithmetisches Mittel, Varianz und Standardabweichung.

**[]**

-----

{{Grafik: Logo Statistik Austria}}

Aufgabe der Statistik Austria ist die Erhebung und Bereitstellung statistischer Informationen für alle Bürger. Viele Daten der Statistik Austria werden über die Homepage www.statistik.at kostenlos zur Verfügung gestellt.

+++7.022 |A, B|

Die Bundesanstalt "Statistik Austria" erstellt Statistiken, die öffentlich zur Verfügung gestellt werden. Zur Mobilität der privaten Haushalte wird regelmäßig erhoben, wie viele Pkws es in Österreich pro Haushalt gibt.

Für 2014/2015 ergaben sich folgende Werte (Quelle: www.statistik.at): 23 % der Haushalte haben keinen Pkw, 50 % haben einen Pkw, 21 % haben zwei Pkws und 6 % haben drei Pkws (genauer: "drei oder mehr").

Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der Pkws pro Haushalt (arithmetisches Mittel), die Varianz und die Standardabweichung.

**[]**

-----

+++7.023 |A, B|

Eine Fahrschule erhebt, wie oft Fahrschüler/innen zur Fahrprüfung antreten: 68 % der Fahrschüler/innen bestehen beim ersten Antritt, 24 % treten zweimal an und 8 % treten dreimal an.

a.)

Stellen Sie die Daten in einer Häufigkeitstabelle dar.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der Antritte der Fahrschüler/innen (arithmetisches Mittel), die Varianz und die Standardabweichung.

**[]**

-----

+++7.024 |D|

Eine Datenreihe hat das arithmetische Mittel 15 und die Standardabweichung 5.

Argumentieren und diskutieren Sie:

Wie verändern sich das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Datenreihe, falls

a.)

zu jedem Wert der Datenreihe 5 addiert wird,

**[]**

---

b.)

jeder Wert der Datenreihe verdoppelt wird,

**[]**

---

c.)

jeder Wert der Datenreihe um 20 % vermindert wird?

**[]**

-----

Hinweis zu den Übungsaufgaben 7.025 und 7.026:

Verwenden Sie als Werte für x\_i die Klassenmitten.

+++7.025 |A, B|

Hinweis zu den Übungsaufgaben 7.025 und 7.026:

Verwenden Sie als Werte für x\_i die Klassenmitten.

In der Forschungsabteilung eines chemischen Unternehmens wird der Zeitaufwand für die Entwicklung neuer Produkte festgestellt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

{{Tabelle aufgelöst}}

aufgewendete Arbeitsstunden: [0; 200[

Anzahl der Projekte: 4

---

aufgewendete Arbeitsstunden: [200; 400[

Anzahl der Projekte: 10

---

aufgewendete Arbeitsstunden: [400; 600[

Anzahl der Projekte: 16

---

aufgewendete Arbeitsstunden: [600; 800[

Anzahl der Projekte: 27

---

aufgewendete Arbeitsstunden: [800; 1000]

Anzahl der Projekte: 13

---

Berechnen Sie die durchschnittlich pro Projekt aufgewendete Stundenzahl und deren Standardabweichung.

**[]**

-----

j-231

+++7.026 |A, B|

Das Personalbüro eines Unternehmens ermittelt für 200 Beschäftigte die Verteilung der Betriebszugehörigkeit in Jahren:

{{Tabelle aufgelöst}}

Betriebszugehörigkeit in Jahren: [0; 4[

Zahl der Angestellten: 29

---

Betriebszugehörigkeit in Jahren: [4; 8[

Zahl der Angestellten: 78

---

Betriebszugehörigkeit in Jahren: [8; 12[

Zahl der Angestellten: 67

---

Betriebszugehörigkeit in Jahren: [12; 16[

Zahl der Angestellten: 16

---

Betriebszugehörigkeit in Jahren: [16; 20]

Zahl der Angestellten: 10

---

Berechnen Sie die durchschnittliche Betriebszugehörigkeit und deren Standardabweichung.

**[]**

-----

## !!7.5 Quartile und Boxplot

Mithilfe der Quartile werden die durch den Median entstandenen Datenhälften nochmals unterteilt.

+++Beispiel 7.24: |B|

Median und Quartile

In einem Wohnblock wurde die Anzahl der in den 20 Haushalten lebenden Personen erhoben. Man erhält folgende geordnete Datenreihe:

1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3;

Unterteilen Sie die Datenreihe in vier gleich große Teile.

n =20

untere Hälfte:

1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3;

obere Hälfte:

3; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 7

1. Viertel:

1; 1; 2; 2; 2;

2. Viertel:

2; 2; 2; 3; 3;

3. Viertel:

3; 3; 3; 4; 4;

4. Viertel:

4; 5; 6; 6; 7

Q\_1 =(2 +2)/2 =2

Q\_2 =(3 +3)/2 =3

Q\_3 =(4 +4)/2 =4

-----

##### Definition: Quartile

||-) Das untere (erste) Quartil Q\_1 ist ein Wert mit der Eigenschaft, dass mindestens 25 % der Daten kleiner oder gleich und zugleich mindestens 75 % der Daten größer oder gleich diesem Wert sind.

-) Das mittlere (zweite) Quartil Q\_2 entspricht dem Median.

-) Das obere (dritte) Quartil Q\_3 ist ein Wert mit der Eigenschaft, dass mindestens 75 % der Daten kleiner oder gleich und zugleich mindestens 25 % der Daten größer oder gleich diesem Wert sind.\||

---

Quartile: lateinisch für Viertelwerte

##### Eigenschaften der Quartile

||Die drei Quartile teilen die geordnete Datenreihe in vier gleich große Teile.\||

---

Der (Inter)quartilsabstand QA ist die Differenz aus oberem und unterem Quartil Q\_3 -Q\_1. Er ist gegenüber Ausreißern unempfindlich. Der Quartilsabstand QA gibt den Bereich an, in dem die mittleren 50 % der Werte der Datenreihe liegen.

Wenn Sie jetzt zu den drei Quartilen noch den kleinsten Wert x\_(min) und den größten Wert x\_(max) einer Datenreihe hinzugeben, kommen Sie zur Fünf-Punkte-Zusammenfassung einer Häufigkeitsverteilung.

|!|: Quartilsabstand QA:

QA =Q\_3 -Q\_1

j-232

{{Grafik: John Wilder Tukey, 1915 bis 2000, US-amerikanischer Statistiker}}

whiskers: englisch für die Schnurrhaare einer Katze

---

Die Fünf-Punkte-Zusammenfassung (nach John W. Tukey) einer Datenreihe besteht aus 5 Maßzahlen:

||Boxplot-Diagramm (Kastenschaubild)

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

1. Minimalwert x\_(min)

2. unteres Quartil Q\_1

3. Median, mittleres Quartil Q\_2

4. oberes Quartil Q\_3

5. Maximalwert x\_(max)\||

---

Ein Boxplot-Diagramm ist eine grafische Veranschaulichung der Fünf-Punkte-Zusammenfassung einer Datenreihe:

-) Die Box erstreckt sich über das aus dem unteren und oberen Quartil gebildeten Intervall [Q\_1; Q\_3].

-) Der Median, also das zweite Quartil Q\_2, wird in der Box durch einen lotrechten Strich markiert.

-) Zwei waagrechte Linien (Whiskers) außerhalb der Box gehen bis zum Minimal- bzw. Maximalwert.

Ein Boxplot-Diagramm wird bei der "Analyse einer Variablen” zur Verfügung gestellt.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Das mit GeoGebra unter "Analyse einer Variablen” erstellte Boxplot-Diagramm

{{Grafik: nicht übertragen}}

+++Beispiel 7.25: |B|

Gegeben ist die Datenreihe: 2; 3; 3; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 8

Ermitteln Sie die Werte für der Fünf-Punkte-Zusammenfassung und zeichnen sie damit das Boxplot-Diagramm für die gegebene Datenreihe.

x\_(min) =2 (Minimalwert)

Q\_1 =3 (Median der unteren Hälfte)

Q\_2 =4,5 (Median)

Q\_3 =7 (Median der oberen Hälfte)

x\_(max) =8 (Maximalwert)

QA =Q\_3 -Q\_1 =7 -3 =4

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

-----

+++Beispiel 7.26: |B|

Testergebnisse

Bei einem Test kann man zwischen 0 und 10 Punkten erreichen.

Die folgenden Boxplot-Diagramme zeigen die Ergebnisse von drei Jahrgängen.

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

Interpretieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten.

Lesen Sie dazu die Kennzahlen Median, Quartile und den Quartilsabstand ab.

Lösung:

-) In allen drei Jahrgängen liegt die Punktezahl zwischen 0 und 10 Punkten.

-) In allen drei Jahrgängen beträgt das dritte Quartil Q\_3 8 (Punkte).

-) Die Jahrgänge A und B haben den gleichen Median 6.

-) Die Jahrgänge A und C haben das gleiche 1. Quartil Q\_1 von 4 Punkten.

-) In den Jahrgängen A und C haben 50 Prozent aller Testpersonen eine Punkteanzahl, die zwischen 4 und 8 Punkten liegt.

-----

j-233

Quartile und Boxplot

Beachten Sie, dass für Datenreihen mit kleinem Umfang die berechneten Quartilswerte manchmal nicht mit den Quartilswerten laut Definition übereinstimmen.

Quartile werden von Technologien unterschiedlich berechnet.

Grafikfähige Taschenrechner und Geogebra berechnen die Quartile als Mediane der unteren und oberen Datenhälften, wobei der Median keiner der beiden Hälften angehört.

+++Beispiel 7.27: |C|

Körpergrößen

Das folgende Boxplot-Diagramm zeigt die Körpergrößen von 400 Maturanten.

Aus dem Diagramm kann man u. a. entnehmen, dass

-) ca. 50 % der Maturanten höchstens 177 cm groß sind.

-) jeder Maturant mindestens 153 cm groß ist.

-) von den 400 Maturanten ca. 100 Maturanten mindestens 181 cm groß sind.

-) von den 400 Maturanten ca. 300 Maturanten mindestens 168 cm groß sind.

-) ca. 200 Maturanten zwischen 168 cm und 181 cm groß sind.

-----

+++Beispiel 7.28: |B|

Haushaltsgröße mit GeoGebra

In einem Wohnblock mit 20 Haushalten ergeben sich für die Anzahl der in den Haushalten lebenden Personen folgende Werte:

2; 3; 5; 4; 6; 2; 2; 6; 2; 2; 2; 3; 1; 3; 3; 4; 3; 1; 7; 4

a.)

Ermitteln Sie mit GeoGebra

das arithmetische Mittel,

die Standardabweichung und

die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung.

---

b.)

Stellen Sie die Daten grafisch durch ein Boxplot dar.

---

Lösung:

a.)

Geben Sie die Daten in einer Tabelle ein (Menü Ansicht > Tabelle).

Markieren Sie die Daten mit der Maus und wählen Sie "Analyse einer Variablen". Bestätigen Sie "Analyse".

Wählen Sie "Statistik anzeigen".

Sie erhalten alle gewünschten Kennzahlen:

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

Für die grafische Darstellung wählen Sie im Pulldown-Menü "Boxplot".

-----

|!|: Beachten Sie:

Das arithmetische Mittel wird mit "Mittelwert" bezeichnet.

Die n-gewichtete Standardabweichung wird mit CT bezeichnet.

j-234

##### Übungsaufgaben

+++7.027 |B, C|

Anna hat 27 CDs mit klassischer Musik. Andreas besitzt 3, Anton 7, Alice freut sich über 9 Klassik-CDs, Antonia hat ebenfalls 7, Arabella besitzt 9, Anja 10 und Astrid 12.

a.)

Ermitteln Sie Modus, Median und arithmetisches Mittel.

**[]**

---

b.)

Interpretieren Sie den Unterschied zwischen arithmetischem Mittel und Median.

**[]**

---

c.)

Ermitteln Sie die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung und stellen Sie die Daten in einem Boxplot-Diagramm dar.

**[]**

-----

+++7.028 |C|

Die Anzahl der Angestellten in 10 Betrieben ist in einem Boxplot-Diagramm dargestellt.

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

Lesen Sie die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung ab.

Interpretieren Sie das Boxplot-Diagramm hinsichtlich der Größe der Betriebe.

**[]**

-----

+++7.029 |B, C|

Ermitteln Sie die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung, zeichnen Sie damit das Boxplot-Diagramm und interpretieren Sie es für die gegebene Datenreihe:

12; 10; 15; 10; 11; 12; 13; 17; 12; 12; 14; 12; 12; 16

**[]**

-----

+++7.030 |B|

Ermitteln Sie Modus, Median und arithmetisches Mittel für die Anzahl der Angestellten in 10 Betrieben:

5; 6; 7; 11; 15; 19; 20; 21; 24; 75

Ermitteln Sie weiters die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung und stellen Sie die Daten in einem Boxplot-Diagramm dar.

**[]**

-----

+++7.031 |B, C, D|

Im Diagramm ist ein Boxplot dargestellt:

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie aus dem Boxplot-Diagramm Minimum, Maximum, Spannweite, Median und Quartile ab.

**[]**

---

b.)

Erklären Sie den Begriff des Quartilsabstands.

Berechnen Sie den Quartilsabstand.

**[]**

-----

+++7.032 |B, C, D|

Die folgende Urliste gibt die erreichten Punkte der 24 Schüler einer Klasse bei einer Mathematikschularbeit an:

10; 25; 30; 48; 42; 37; 22; 39; 0; 5; 18; 35; 35; 26; 29; 31;

33; 35; 27; 25; 10; 48; 41; 13;

a.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Punktezahl.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie die Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung, zeichnen Sie das Boxplot-Diagramm für die Punktezahl und interpretieren Sie es.

**[]**

---

c.)

Folgender Notenschlüssel ist für die Schularbeit vorgegeben:

0 bis 24 Punkte: Nicht genügend

25 bis 31 Punkte: Genügend

32 bis 37 Punkte: Befriedigend

38 bis 44 Punkte: Gut

45 bis 48 Punkte: Sehr gut

-) Zeichnen Sie die Notenstatistik als Diagramm.

**[]**

-) Ermitteln Sie die Durchschnittsnote der Klasse.

**[]**

-) Erklären Sie, welcher Mittelwert sinnvoll ist.

**[]**

-----

j-235

+++7.033 |B, C|

In einer Klasse wird ermittelt, wie oft die Schülerinnen und Schüler am Vortag eine SMS verschickt haben.

Das Ergebnis ist in folgenden Boxplot-Diagrammen dargestellt.

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie die Werte mit der geringsten und der größten SMS-Versendung jeweils für Schüler und Schülerinnen ab.

**[]**

---

b.)

Ermitteln Sie jeweils die Spannweite und erklären Sie den Begriff der Spannweite.

**[]**

---

c.)

Begründen Sie, warum Sie aus dem Diagramm ablesen können, dass mindestens 25 % der Schülerinnen bis zu 2 SMS am Vortag verschickt haben.

**[]**

-----

+++7.034 |A, B, C, D|

Fußballweltmeisterschaft 2014 in Brasilien

Das folgende Diagramm zeigt die Auswertung der Anzahl der Tore aller Gruppenspiele in einem Boxplot-Diagramm.

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

a.)

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Aussage: "In der Hälfte aller Gruppenspiele wurden höchstens drei Tore erzielt."

**[]**

---

b.)

Lesen Sie den Quartilsabstand aus dem Boxplot-Diagramm ab.

Die folgenden Werte zeigen die Anzahl der Tore der 8 Viertelfinalspiele bei der Fußballweltmeisterschaft 2014 in Brasilien:

5; 2; 3; 8; 2; 3; 1; 3

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie ein Boxplot-Diagramm zu den erzielten Toren der 8 Viertelfinalspiele.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie das arithmetische Mittel und begründen Sie, warum dieser Wert höher ist als der Median.

**[]**

-----

+++7.035 |B, C|

Die Grafik zeigt das Ergebnis eines Känguruwettbewerbs von drei Klassen eines zweiten Jahrgangs.

a.)

Lesen Sie ab, welche Klasse die besten Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung hat.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie jeweils den Quartilsabstand der drei Klassen.

{{Grafik: Boxplot-Diagramm nicht übertragen}}

**[]**

-----

j-236

## !!7.6 Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

### !!7.6.1 Lorenzkurve

Ungleichheit der Verteilung des Vermögens in Österreich

"Ein Zehntel der Haushalte in Österreich verfügt über ein Nettovermögen von weniger als rund 1000 EUR. Rund die Hälfte der Haushalte besitzt weniger als rund 76000 EUR. Mehr als drei Viertel aller Haushalte liegen unter dem Mittelwert von rund 265000 EUR und nur ein Zehntel der Haushalte verfügt über ein Vermögen von mehr als rund 542000 EUR."

Quelle: Oesterreichische Nationalbank: Fakten zur Vermögensverteilung in Österreich, 2012.

+++Beispiel 7.29: |A, B, C|

Verteilung des Bruttovermögens in Österreich

"Die Anteile der vier Haushaltsgruppen am gesamten Vermögen in Österreich unterscheiden sich beträchtlich voneinander.

So verfügt die gesamte untere Hälfte der Haushalte über rund 4 % des gesamten Bruttovermögens. Die obere Mitte (30 % der Haushalte) hält rund 22 % des gesamten Bruttovermögens, die Vermögenden (15 % der Haushalte) besitzen rund 29 % und die Top-5 % halten rund 45 % des gesamten Bruttovermögens.

Anders ausgedrückt: Die kleinste Gruppe (Top-5 %) besitzt fast die Hälfte des gesamten Bruttovermögens, während die größte Gruppe (untere Hälfte) nur einen minimalen Anteil am gesamten Bruttovermögen hat."

Quelle: Oesterreichische Nationalbank, 2012.

a.)

"[...] während die größte Gruppe (untere Hälfte) nur einen minimalen Anteil am gesamten Bruttovermögen hat."

Lesen Sie den minimalen Anteil aus dem Angabetext ab.

---

b.)

Stellen Sie in einer Tabelle

-) die Anteile der Haushalte,

-) die kumulierten (aufsummierten) Anteile der Haushalte,

-) die Anteile am gesamten Bruttovermögen und

-) die kumulierten Bruttovermögensanteile zusammen.

---

c.)

Stellen Sie die kumulierten Anteile der Haushalte und die kumulierten Anteile am gesamten Bruttovermögen in einem Koordinatensystem dar.

Ergänzen Sie Ihre Grafik um die Strecke durch die Punkte (0|0) und (1|1).

---

Lösung:

a.)

Minimaler Anteil: 4 % =0,04

---

b.)

Untere Hälfte der Haushalte:

Anteil der Haushalte =0,5

Anteil am gesamten Bruttovermögen =0,04

{{Tabelle aufgelöst}}

Anteil der Haushalte: Untere Hälfte (0,5)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,5

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,04

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,04

---

Anteil der Haushalte: Obere Mitte (0,3)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,8

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,22

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,26

---

Anteil der Haushalte: Vermögende (0,15)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,95

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,29

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,55

---

Anteil der Haushalte: Top-5 %

Kumulierter Anteil der Haushalte: 1,0

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,45

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 1,00

---

c.)

Auf der ersten Achse werden die kumulierten Anteile der Haushalte und auf der zweiten Achse die kumulierten Anteile am gesamten Bruttovermögen aufgetragen. Grafik: siehe Randspalte

{{Grafik: nicht übertragen}}

Grafische Darstellung der kumulierten Anteile am gesamten Bruttovermögen als Streckenzug und der Strecke durch (0|0) und (1|1).

Der Streckenzug verläuft anfangs extrem flach, weil die untere Hälfte der Haushalte nur über rund 4 % des gesamten Bruttovermögens verfügt.

Der Streckenzug durch die Punkte (0|0), (0,5|0,04), (0,8|0,26), (0,95|0,55) und (1|1) ist die zugehörige Lorenzkurve.

Die Strecke zwischen (0|0) und (1|1) ist eine Diagonale des Einheitsquadrates.

Mit Diagonale ist in diesem Kapitel immer diese gemeint.

-----

j-237

Max Otto Lorenz hat die nach ihm benannten Kurven 1905 zur Charakterisierung von Vermögenskonzentrationen benutzt.

##### Definition: Lorenzkurve

||Für eine geordnete Urliste x\_1 <=x\_2 <=... <=x\_n ist die zugehörige Lorenzkurve der Streckenzug durch die Punkte (0|0), (u\_1|v\_1), ..., (u\_n|v\_n).

Dabei ist

-) u\_j =j/n der Anteil der Merkmalsträger und

-) v\_j =('Si[i =1; j](x\_i))/('Si[i =1; n](x\_i)) die kumulierte relative Merkmalssumme.\||

---

{{Grafik: Max Otto Lorenz, 1876 bis 1959, US-amerikanischer Statistiker}}

##### Eigenschaften einer Lorenzkurve

||-) Stets ist u\_n =n/n =1 und v\_n =('Si[i =1; n](x\_i))/('Si[i =1; n](x\_i)) =1

-) Daher ist der letzte Punkt der Lorenzkurve (u\_n|v\_n) immer gleich (1|1).

-) Eine Lorenzkurve geht immer durch die beiden Punkte (0|0) und (1|1).

-) Die Lorenzkurve für eine geordnete Urliste mit n Werten besteht aus n +1 Punkten.

-) Jede Lorenzkurve wächst monoton.

-) Jede Lorenzkurve ist konvex, also nach unten gewölbt.

-) Fällt der Streckenzug mit der Diagonalen zusammen, so liegt eine Gleichverteilung vor (Nullkonzentration).

-) Die Entfernung der Lorenzkurve von der Diagonalen ist ein Maß für die Stärke der Konzentration.

-) Wenn sich die Lorenzkurve weit von der Diagonale entfernt, liegt eine starke Konzentration vor.\||

---

{{Grafik: Eine Lorenzkurve für eine Urliste mit zehn werten}}

{{Grafik: Gleichverteilung: x % der Merkmalsträger besitzen x% der kumulierten relativen Merkmalssumme.}}

{{Grafik: Fast vollständige Konzentration: Auf die obersten 10 % entfallen 87 %}}

+++Beispiel 7.30: |A, B, C|

Lorenzkurve ermitteln

Zehn Schülerinnen einer Klasse teilen von ihnen erwirtschaftete einhundert Euro wie folgt auf:

5; 6; 7; 5; 20; 27; 5; 5; 10; 10

a.)

Erstellen Sie - der Definition der Lorenzkurve folgend - eine geordnete Urliste.

---

b.)

Berechnen Sie die Anteile der Merkmalsträger u\_j =j/n.

---

c.)

Berechnen Sie die kumulierten relativen Merkmalssummen v\_j =('Si[i =1; j](x\_i))/('Si[i =1; n](x\_i))

---

d.)

Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve.

Ergänzen Sie Ihre Grafik um die Strecke durch die Diagonale.

---

Lösung:

a.)

Geordnete Urliste: 5; 5; 5; 5; 6; 7; 10; 10; 20; 27

---

b.)

n =10;

Anteile der Merkmalsträger:

u\_1 =1/10; u\_2 =2/10; ...; u\_(10) =10/10 =1

---

c.)

Kumulierte relative Merkmalssummen:

v\_1 =5/100; v\_2 =10/100; ...; v\_(10) =100/100 =1

{{Grafik: nicht übertragen}}

Die Spalte D enthält die Zähler der kumulierten relativen Merkmalssummen v\_j und erleichtert deren Berechnung in der Spalte E.

---

d.)

Lorenzkurve und Diagonale

{{Grafik: nicht übertragen}}

Mögliche Vorgangsweise in Geo-Gebra:

Markieren Sie dazu die Werte u\_j (Spalte B) und v\_j (Spalte E), also die Punkte (u\_j|v\_j).

Mit Kontext-Menü / Erzeuge Streckenzug können Sie den zugehörigen Streckenzug, also die Lorenzkurve erzeugen. Die Diagonale des Einheitsquadrats können Sie über Strecke[(0, 0), (1, 1)] hinzufügen.

-----

j-238

### !!7.6.2 Gini-Koeffizient

+++Beispiel 7.31: |A, B, C|

Maßzahl zur Beurteilung einer Konzentration

Ausgehend von den "Fakten zur Vermögensverteilung in Österreich" haben Sie im Beispiel 7.29 die untenstehende Tabelle erstellt.

{{Tabelle aufgelöst}}

Anteil der Haushalte: Untere Hälfte (0,5)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,5

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,04

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,04

---

Anteil der Haushalte: Obere Mitte (0,3)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,8

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,22

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,26

---

Anteil der Haushalte: Vermögende (0,15)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,95

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,29

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,55

---

Anteil der Haushalte: Top-5 %

Kumulierter Anteil der Haushalte: 1,0

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,45

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 1,00

---

{{Grafik: Lorenzkurve für das Bruttovermögen in Österreich}}

a.)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Diagonale und der ersten Achse.

---

b.)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Diagonale und der Lorenzkurve.

---

c.)

Berechnen Sie den Quotienten der beiden Flächeninhalte aus b) und a).

---

d.)

Markieren Sie die Fläche zwischen der Diagonale und der Lorenzkurve.

---

Lösung:

a.)

Die Fläche zwischen der Diagonale und der ersten Achse ist die Hälfte eines Einheitsquadrates. Daher ist der Flächeninhalt 1/2.

---

b.)

Für die Berechnung des Inhalts A der Fläche zwischen der Diagonale und der Lorenzkurve berechnet man zuerst den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der ersten Achse und subtrahiert diesen Wert von 1/2.

Die Fläche zwischen der Lorenzkurve und der ersten Achse setzt sich aus einem rechtwinkeligen Dreieck und drei Trapezen zusammen.

A =1/2 -(0,5 \*0,04 \*1/2 +0,3 \*1/2 \*(0,04 +0,26) +0,15 \*1/2 \*(0,26 +0,55) +0,05 \*1/2 \*(0,55 +1) =1/2 -(0,01 +0,045 +0,06075 +0,03875) =1/2 -0,1545 =0,3455

In GeoGebra kann man die Fläche als Vieleck auffassen und so den Flächeninhalt berechnen.

A =Vieleck[K, L, M, N, O, K]

{{Grafik: Fläche:=Vieleck[A,B,C,D,E]

-> Fläche :=0.3455}}

{{Grafik: nicht übertragen}}

|!|: Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte des markierten Flächeninhalts: G =2 \*0,3455 =0,691

c.)

Der Quotient ist (0,3455)/(0,5) =0,691. Dieser Quotient ist der Gini-Koeffizient.

---

d.)

siehe b.)

-----

j-239

Corrado Gini entwickelte den nach ihm benannten Gini-Koeffizienten zur Darstellung von Ungleichverteilungen. Ungleichverteilungskoeffizienten können für beliebige Verteilungen berechnet werden.

Der Gini-Koeffizient nimmt einen Wert zwischen 0 (bei einer gleichmäßigen Verteilung) und 1 (wenn nur eine Person das komplette Einkommen erhält, d. h. bei maximaler Ungleichverteilung) an.

Unter einer gleichmäßigen Verteilung ist dabei zu verstehen, dass das Einkommen (Vermögen) eines jeden gleich hoch ist, und nicht, dass jede Einkommenshöhe (jedes Vermögen) gleich häufig ist.

{{Grafik: Corrado Gini, 1884 bis 1965, italienischer Statistiker}}

##### Definition: Gini-Koeffizient

||Für n geordnete Werte x\_1 <=x\_2 <=... <= x\_n ist der Gini-Koeffizient G der Quotient zweier Flächen.

G =(Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve)/(Fläche zwischen Diagonale und erster Achse) =2 \*Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve

G =(2 \*'Si[i =1; n](i \*x\_i))/(n \*'Si[i =1; n](x\_i)) -(n +1)/n\||

---

Stärkste vorstellbare Konzentration: "Einer von fünf hat alles."

Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte des markierten Flächeninhalts:

G =2 \*0,4 =0,8

Alternativ: G =(5 -1)/5 =4/5 =0,8

---

##### Eigenschaften des Gini-Koeffizienten

||-) Die Fläche zwischen der Diagonale und der ersten Achse ist immer 1/2.

-) Daher ist der Gini-Koeffizient das Doppelte der Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve, weil eine Lorenzkurve immer durch die beiden Punkte (0|0) und (1|1) geht.

-) Für eine Gleichverteilung (Nullkonzentration) ist der Gini-Koeffizient null. G =0, weil die Lorenzkurve mit der Diagonale zusammenfällt.

-) Bei der stärksten vorstellbaren Konzentration ("eine(r) hat alles") ist G =(n -1)/n <1.

-) Der Gini-Koeffizient kann daher Werte im Intervall [0; 1[ annehmen: 0 <=G <1.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Gleichverteilung G =0

Das Vermögen ist gleichverteilt

{{Grafik: nicht übertragen}}

Fast vollständige Konzentration G ~~0,8 Wenige besitzen fast alles.\||

---

Ein Vergleich von Ginikoeffizienten für das Einkommen der Bevölkerung in verschiedenen Ländern. (Quelle: OECD 2016)

{{Grafik: So far, the economic recovery has not reduced inequality

Gini coefficient of disposable income inequality in 2007 -14 (or latest year), total population}}

j-240

+++Beispiel 7.32: |A, B, C|

Gini-Koeffizient (Fortsetzung von Beispiel 7.30)

Zehn Schülerinnen einer Klasse nehmen 100 Euro ein und teilen diese Einnahmen wie folgt auf die einzelnen Schülerinnen auf:

Geordnete Urliste: 5; 5; 5; 5; 6; 7; 10; 10; 20; 27

a.)

Berechnen und markieren Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Diagonale und der Lorenzkurve.

---

b.)

Ermitteln Sie den Gini-Koeffizienten als Maß für die Ungleichverteilung der Einnahmen in der Klasse.

---

c.)

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten mithilfe der in der Definition angegebenen Formel.

---

"Einer von zehn hat alles."

{{Grafik: nicht übertragen}}

Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte des markierten Flächeninhalts:

G =2 \*0,45 =0,9

Alternativ: G =(10 -1)/10 =9/10 =0,9

---

Lösung:

a.)

Die Fläche ist ein Vieleck mit dem Inhalt 0,172.

---

b.)

Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte des in a) berechneten Vieleckinhalts: G =2 \*0,172 =0,344

---

c.)

Berechnung mit den Summen:

G =(2 \*(1 \*5 +2 \*5 +3 \*5 +4 \*5 +5 \*6 +6 \*7 +7 \*10 +8 \*10 +9 \*20 +10 \*27)/(10 \*(4 \*5 +6 +7 +2 \*10 +20 +27) -(11)/(10) =(2 \*722)/(10 \*100) -(11)/(10) =(1444 -1100)/(1000) =(344)/(1000) =0,344

Berechnung der Summen, der Quotienten und der Differenz mit Technologie:

{{Grafik: Berechnung mit Technologie nicht übertragen}}

-----

j-241

##### Übungsaufgaben

+++7.036 |A, B, D|

In einem Staat unterscheiden sich die Anteile verschiedener Gruppen am gesamten Vermögen beträchtlich voneinander.

Die gesamte untere Hälfte der Haushalte verfügt über rund 7 % des gesamten Bruttovermögens. Die obere Mitte (30 % der Haushalte) hält rund 19 % des gesamten Bruttovermögens und die Vermögenden (15 % der Haushalte) besitzen rund 41 %.

a.)

Berechnen Sie, welchen Anteil am gesamten Bruttovermögen die Top-5 % halten.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie in einer Tabelle die Anteile der Haushalte, die kumulierten (aufsummierten) Anteile der Haushalte, die Anteile am gesamten Bruttovermögen und die kumulierten Bruttovermögensanteile zusammen.

**[]**

---

c.)

Stellen Sie die zugehörige Lorenzkurve grafisch dar.

**[]**

---

d.)

Erklären Sie, was der vierte Punkt des Streckenzuges, also der vierte Punkt der Lorenzkurve aussagt.

**[]**

-----

+++7.037 |A, B|

Fünf Schülerinnen einer Klasse teilen von ihnen erwirtschaftete zweihundert Euro wie folgt auf:

35; 106; 27; 15; 17

a.)

Erstellen Sie - der Definition der Lorenzkurve folgend - eine geordnete Urliste.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie die Anteile der Merkmalsträger u\_j =j/n

**[]**

---

c.)

Berechnen Sie die kumulierten relativen Merkmalssummen v\_j =('Si[i =1; j](x\_i))/('Si[i =1; n](x\_i)).

**[]**

---

d.)

Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve.

Fünfzehn Jugendliche teilen von ihnen erwirtschaftete 1.200 Euro wie folgt auf:

100; 50; 100; 100; 90; 100; 110; 90; 90; 120; 50; 50; 50; 50; 50

a.)

Erstellen Sie - der Definition der Lorenzkurve folgend - eine geordnete Urliste.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve.

**[]**

---

c.)

Interpretieren Sie den Verlauf der Lorenzkurve.

Vergleichen Sie insbesondere die Bereiche mit konstanten Beträgen.

**[]**

---

d.)

Berechnen Sie den zugehörigen Gini-Koeffizienten.

**[]**

-----

+++7.039 |D|

Die Behauptung, dass für eine Gleichverteilung (Nullkonzentration) der Gini-Koeffizient null ist, ist, da alle Punkte der Lorenzkurve auf der ersten Diagonale liegen, sofort einsichtig.

Zeigen Sie, dass G =0 auch aus der in der Definition angegebenen Formel folgt.

**[]**

-----

+++7.040 |D|

Unter den Eigenschaften des Gini-Koeffizienten heißt es:

"Bei der stärksten vorstellbaren Konzentration ("eine(r) hat alles") ist G =(n -1)/n <1."

Beweisen Sie diese Eigenschaft anhand einer geeigneten Lorenzkurve.

{{Grafik: nicht übertragen}}

Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte des markierten Flächeninhalts:

G =2 \*0,45 =0,9

Alternativ: G =(10 -1)/(10) =9/(10) =0,9

**[]**

-----

+++7.041 |D|

In den "Fakten zur Vermögensverteilung in Österreich 2012" heißt es:

"Die Gini-Koeffizienten aller Vermögenskomponenten liegen demnach in Österreich über 0,70. Ein Gini-Koeffizient von 0,70 wird etwa auch dann erreicht, wenn in einer Grundgesamtheit von 100 Haushalten 99 Haushalte 1 EUR und ein Haushalt 250 EUR an Vermögen hätte.

Zu bedenken gilt es aber, dass es unendlich viele verschiedene Verteilungen gibt, die einen bestimmten Gini-Koeffizienten erzeugen können."

a.)

Zeigen Sie, dass "wenn in einer Grundgesamtheit von 100 Haushalten 99 Haushalte 1 EUR und ein Haushalt 250 EUR an Vermögen hätte", der zugehörige Gini-Koeffizient 0,7 ist.

**[]**

---

b.)

Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve.

**[]**

-----

j-242

+++7.042 |C, D|

Die untenstehenden Grafiken zeigen für zwei Länder die Lorenzkurven für den Grundbesitz.

{{Grafik: nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie ab und vervollständigen Sie.

Im ersten Land besitzt die ärmere **[]** der Bevölkerung **[]** des Grundbesitzes.

Im zweiten Land besitzen die reichsten **[]** der

Bevölkerung **[]** des Grundbesitzes.

---

b.)

Erstellen Sie die geordneten Urlisten für die beiden Länder.

**[]**

---

c.)

Zeigen Sie, dass die beiden Länder denselben Gini-Koeffizienten haben.

**[]**

-----

##### Ziele erreicht?

+++Z 7.1 |A, B|

In einer Schule wurde erhoben, welches Verkehrsmittel die Schüler/innen für ihren Schulweg benutzen.

Verkehrsmittel: Zu Fuß

Anzahl der SchülerInnen: 130

---

Verkehrsmittel: Bus

Anzahl der SchülerInnen: 240

---

Verkehrsmittel: Privat-Pkw

Anzahl der SchülerInnen: 85

---

Verkehrsmittel: Zug

Anzahl der SchülerInnen: 145

---

a.)

Der Schulsprecher behauptet: "Mehr als 20 Prozent unserer Schüler/innen kommen zu Fuß zur Schule".

Überprüfen Sie diese Behauptung.

**[]**

---

b.)

Stellen Sie die erhobenen Daten in einem Säulendiagramm dar.

**[]**

---

c.)

Stellen Sie die relativen Häufigkeiten der benutzten Verkehrsmittel in einem Kreisdiagramm dar.

**[]**

-----

+++Z 7.2 |B, C, D|

Eine Firma untersucht die Lebensdauer eines von ihr produzierten elektronischen Bauteils, indem sie zufällig 11 Bauteile auswählt und deren Lebensdauer in Monaten beobachtet.

Das Ergebnis der Untersuchung zeigt folgende Tabelle:

35; 47; 55; 32; 40; 39; 41; 42; 57; 51; 39

a.)

Berechnen Sie die durchschnittliche Lebensdauer der Bauteile und die Standardabweichung.

Um die Lebensdauer des Bauteils zu erhöhen, wird die Herstellung des Produkts geändert. Eine Testung ergibt nun eine durchschnittliche Lebensdauer von 44,7 Monaten.

**[]**

---

b.)

Erklären Sie, ob die neue Produktionsweise tatsächlich zu einer höheren Lebensdauer der Bauteile führt, wenn man weiß, dass die Standardabweichung dieser Testung 11,7 Monate beträgt.

**[]**

---

j-243

+++Z 7.3 |A, B, C, D|

Durch den Einbau von Filteranlagen kann eine Papierfabrik die Schadstoffmenge in ihren Abwässern reduzieren.

Stolz verkündet der Firmenchef: "Im ersten Jahr konnten wir die Schadstoffmenge um 31 %, im folgenden Jahr um weitere 36 % und im dritten Jahr sogar um 44 % reduzieren."

a.)

Herr Trager meint:

"So ein Schwachsinn, dann wären die Schadstoffmengen ja jährlich um durchschnittlich (110)/3 % gesunken und insgesamt um 110 %. Wie soll das denn gehen?"

Erklären Sie, warum Herr Trager irrt.

**[]**

---

b.)

Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Schadstoffmenge insgesamt in den beschriebenen drei Jahren gesenkt wurde.

**[]**

---

c.)

Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der durchschnittlichen jährlichen Schadstoffreduktion in diesen drei Jahren.

**[]**

-----

+++Z 7.4 |C, D|

In einer Schulklasse wurde erhoben, wie viele Minuten die Schüler/innen durchschnittlich täglich telefonieren. Das Ergebnis der Erhebung ist in folgendem Boxplotdiagramm dargestellt.

{{Grafik: Boxplotdiagramm nicht übertragen}}

a.)

Lesen Sie den Median und die Quartile aus dem Boxplot ab.

**[]**

---

b.)

Kreuzen Sie an, welche Aussagen aufgrund des Boxplots getroffen werden können.

**[]**: 50 % aller Schüler/innen telefonieren weniger als 50 Minuten.

**[]**: Genau ein/e Schüler/in telefoniert täglich nicht mehr als 10 Minuten.

**[]**: Mindestens 75 % aller Schüler/innen telefonieren täglich mindestens 25 Minuten.

**[]**: Mindestens 50 % aller Schüler/innen telefonieren mindestens 25 aber höchstens 90 Minuten täglich.

**[]**: 25 % aller Schüler/innen telefonieren höchstens 51 Minuten täglich.

**[]**: Die Schüler/innen telefonieren höchstens 120 Minuten täglich.

-----

j-244

# !!Lösungen

## !!1 Differenzen- und Differenzialquotient

+++1.001

a.)

Begründung mittels Tabelle

f(2) =-1

---

b.)

Begründung mittels Tabelle

0; Lücke

---

c.)

Begründung mittels Tabelle

-4; Lücke

---

d.)

Begründung mittels Tabelle

Pol

---

e.)

Begründung mittels Tabelle

0,5; Lücke

---

f.)

Begründung mittels Tabelle

1/6; Lücke

---

g.)

Begründung mittels Tabelle

3/5; Lücke

-----

+++1.002

a.)

0

---

b.)

1/3

---

c.)

existiert nicht

---

d.)

3/5

-----

+++1.003

a.)

2

---

b.)

2/3

---

c.)

3

---

d.)

existiert nicht

---

e.)

0

-----

+++1.003

f.)

existiert nicht

---

g.)

0

---

h.)

50

---

i.)

25

---

j.)

2

-----

+++1.004

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

D: 'R\{x\_2; x\_6}

x\_1: stetig

x\_2: Polstelle

x\_3: stetig

x\_4: unstetig; Sprungstelle

x\_5: stetig

x\_6: hebbare Lücke

---

b.)

{{Tabelle aufgelöst}}

D: 'R\{x\_1; x\_5}

x\_1: hebbare Lücke

x\_2: stetig

x\_3: unstetig; Sprungstelle

x\_4: stetig

x\_5: Polstelle

x\_6: unstetig; Sprungstelle

-----

+++1.005

a.)

D ='R; stetig in K

---

b.)

D ='R; stetig in K

---

c.)

D = 'R\(-2}; stetig in d ='R\{-2}; hebbare Lücke

---

d.)

D ='R\{0}; stetig in D ='R\{0}; x =0; hebbare Lücke

---

e.)

D ='R\{1}; stetig in D ='R\{1}; x =1; Polstelle

---

f.)

D ='R\{-4}; stetig in D ='R{-4}; x =-4; Polstelle

-----

+++1.006

D ='R\{1} für a.) bis c.)

a.)

x =1; y =0

D ='R\{1}

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

x =1; y =1

D ='R\{1}

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

x =1; y =x +2

D ='R\{1}

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++1.007

a.)

D ='R\{-1; 1}; x =-1, y =1; existiert nicht, 4, 4/5, 1

---

b.)

D ='R\{-3; 2}; x =-3, y =1; 1/4, 0, 2/5, existiert nicht

-----

+++1.008

a.)

D ='R\{-1; 2}

---

b.)

x =-1, x =2 (hebbar)

---

c.)

x =-1

---

d.)

x =-1, y =x +1

---

e.)

existiert nicht, 0, 8/3

---

f.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++1.009

a.)

gerade, da f(-x) =(-x)^2 -1 =x^2 -1 =f(x)

---

b.)

ungerade, da f(-x) =2 \*(-x)^3 +4 \*(-x) =-(2x^3 +4x) =-f(x)

---

c.)

ungerade, da f(-x) =1/(-x) =-1/x =-f(x)

---

d.)

weder gerade noch ungerade, da f(-x) ='e^(-x) \=f(x) und f(-x) ='e^(-x) -f(x)

---

e.)

gerade, da f(-x) ='e^(-(-x)) ='e^((-x)^2) =f(x)

-----

+++1.010

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

t in h: 4

T(t) in °C: 3,9

---

t in h: 8

T(t) in °C: 4,9

---

t in h: 12

T(t) in °C: 7,2

---

t in h: 16

T(t) in °C: 7,5

---

t in h: 18

T(t) in °C: 4,9

---

b.)

0,25 °C/h; 0,575 °C/h; 0,075 °C/h; -1,3 °C/h

positives Vorzeichen: Die Temperatur steigt im Intervall. negatives Vorzeichen: Die Temperatur sinkt im Intervall.

---

c.)

Für [12; 16] wenig aussagekräftig, da in diesem Intervall die Temperatur zuerst steigt und dann wieder fällt.

---

d.)

[16; 18]

Man zeichnet die Sekanten an die Funktion für das jeweilige Intervall.

Die steilste Sekante gibt das Intervall mit der betragsmäßig größten mittleren Änderungsrate an.

-----

j-245

+++1.011

a.)

v^- =('De s)/('De t) =(s(8) -s(0))/(8 -0) =(50)/8 =6,25 m/s

---

b.)

v^- =(180 -50)/(18 -8) =(130)/(10) =13 m/s

---

c.)

v^- =(200 -180)/(21 -18) =(20)/3 ~~6,67 m/s

---

d.)

Nein, dies ist nur bedingt möglich. Kurzzeitige Geschwindigkeitsänderungen werden in der mittleren Geschwindigkeit nur ungenügend berücksichtigt.

-----

+++1.012

a.)

128,6 km/h

---

b.)

110,5 km/h; 115,4 km/h; 86,7 km/h; 149,6 km/h

-----

+++1.013

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

Intervall: [0; 1]

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 1 -0 =1

Temperaturänderung 'De T in °C: 52,2 -55,3 =-3,1

Mittlere Änderungsrate ('De T)/('De t) in (°C)/(min): (-3,1)/1 =-3,1

---

Intervall: [15; 16]

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 16 -15 =1

Temperaturänderung 'De T in °C: 31,8 -32,4 =-0,6

Mittlere Änderungsrate ('De T)/('De t) in (°C)/(min): (-0,6)/1 =-0,6

---

Intervall: [29; 30]

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 30 -29 =1

Temperaturänderung 'De T in °C: 25,9 -26,2 =-0,3

Mittlere Änderungsrate ('De T)/('De t) in (°C)/(min): (-0,3)/1 =-0,3

---

Intervall: [0; 15]

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 15 -0 =15

Temperaturänderung 'De T in °C: 32,4 -55,3 =-22,9

Mittlere Änderungsrate ('De T)/('De t) in (°C)/(min): (-22,9)/(15) =-1,53

---

Intervall: [15; 30]

Zeitdifferenz 'De t in Minuten: 30 -15 =15

Temperaturänderung 'De T in °C: 25,9 -32,4 =-6,5

Mittlere Änderungsrate ('De T)/('De t) in (°C)/(min): (-6,5)/(15) =-0,43

---

b.)

Die mittlere Änderungsrate der Temperatur pro Minute beträgt im Intervall [0; 1], d. h. zu Beginn der Temperaturmessung, ('De T)/('De t) ~~-2,9 (°C)/(min)

Die Temperatur des Kaffees ändert sich in der ersten Minute um -2,9 °C.

Die mittlere Änderungsrate der Temperatur pro Minute beträgt im Intervall [29; 30], d. h. am Ende der Temperaturmessung, ('De T)/('De t) =-0,3 (°C)/(min)

Die Temperatur des Kaffees ändert sich in der letzten Minute um nur -0,3°C.

---

c.)

Die Temperaturänderung zu Beginn der Temperaturmessung ist deutlich größer als nach 30 Minuten. Die Temperatur von heißem Kaffee ändert sich somit schneller als die Temperatur von bereits etwas abgekühltem Kaffee.

-----

+++1.014

a.)

Nach ca. 120 min (2 h) ist die Konzentration mit 48 ('my g)/(ml) maximal.

---

b.)

Nach ca. 550 min (9 h 10 min) wirkt das Medikament nicht mehr.

---

c.)

{{Tabelle aufgelöst}}

Intervall: [0; 0,5]

Zeitdifferenz 'De t in Stunden: 0,5 -0 =0,5

Konzentrationsänderung 'De C in ('my)/(ml): 20,5 -0 =20,5

Mittlere Änderungsrate ('De C)/('De t) in (('my)/(ml))// (h): (20,5)/(05) =41

---

Intervall: [1,5; 2]

Zeitdifferenz 'De t in Stunden: 2 -1,5 =0,5

Konzentrationsänderung 'De C in ('my)/(ml): 48 -44,5 =3,5

Mittlere Änderungsrate ('De C)/('De t) in (('my)/(ml))// (h): (3,5)/(0,5) =7

---

Intervall: [2; 2,5]

Zeitdifferenz 'De t in Stunden: 2,5 -2 =0,5

Konzentrationsänderung 'De C in ('my)/(ml): 41 -48 =-7

Mittlere Änderungsrate ('De C)/('De t) in (('my)/(ml))// (h): (-7)/(0,5) =-14

---

Intervall: [4; 8]

Zeitdifferenz 'De t in Stunden: 8 -4 =4

Konzentrationsänderung 'De C in ('my)/(ml): 18,5 -31 =-12,5

Mittlere Änderungsrate ('De C)/('De t) in (('my)/(ml))// (h): (-12,5)/4 =-3,125

-----

+++1.015

a.)

5;

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

1 3/8

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++1.016

a.)

'al ~~75,964°

---

b.)

'al ~~26,565°

---

c.)

'al ~~135°

-----

+++1.017

a.)

5

---

b.)

-5/4

---

c.)

'w(2) -1 ~~0,414

-----

j-246

+++1.018

a.)

-2,25; -2,025; -2,0025;

Die Sekantensteigungen nähern sich dem Wert -2.

---

b.)

2,375; 1,576 25; 1,5075125; 1,500750125;

nähert sich dem Wert 1,5

-----

+++1.019

a.)

0,333; 0,414; 0,488; 0,499;

nähert sich dem Wert 0,5

---

b.)

-0,25; -0,5; -0,91; -0,99;

nähert sich dem Wert -1

-----

+++1.020

a.)

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =((x\_0 +'De x)^2 -4 -x\_0^2 +4)/('De x) =(x\_0^2 +2 \*x\_0 +'De x +('De x)^2 -4 -x\_0^2 +4)/('De x) =(2 \*x\_0 \*'De x +('De x)^2)/('De x) =('De x \*(2 \*x\_0 \*'De x))/('De x) =2 \*x\_0 +'De x

f'(x\_0) ='lim['De x -> x\_0](2 \*x\_0 +'De x) =2 \*x\_0

f'(1) =2

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ableitungsfunktion f' mit f'(x) =2 \*x

---

b.)

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =((3 \*(x\_0 +'De x)^2 -2 \*(x\_0 +'De x) +1) -(3 \*x\_0^2 -2 \*x\_0 +1))/('De x) =(3 \*x\_0^2 +6 \*x\_0 \*'De x +3 \*('De x)^2 -2 \*x\_0 -2 \*De x +1 -3 \*x\_0^2 +2 \*x\_0 -1)/('De x) =(6 \*x\_0 \*'De x +3 \*('De x)^2 -2 \*'De x)/('De x) =6 \*x\_0 +3 \*'De x -2

f'(x\_0) ='lim['De x ->0](6 \*x\_0 +3 \*'De x -2) =6 \*x\_0 -2

f'(1) =4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ableitungsfunktion f' mit f'(x) =6 \*x -2

---

c.)

('De y)/('De x) =(f(x\_0 +'De x) -f(x\_0))/('De x) =((1/(x\_0 +'De x)) -(1/(x\_0)))// ('De x) =((x\_0 -(x\_0 +'De x))/((x\_0 +'De x) \*x\_0))// ('De x) =((-'De x)/(x\_0^2 +'De x \*x\_0))// (('De x)/1)) =-1/(x\_0^2 +x\_0 \*De x)

f'(x\_0) ='lim['De x -> 0](-(1/(x\_0^2 +x\_0 \*'De x))) =-1/(x\_0^2)

f'(-2) =-1/4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ableitungsfunktion f' mit f'(x) =-1/(x^2)

-----

+++1.021

a.)

x =-2; Knick

---

b.)

x =0; Pol

---

c.)

x =-2 und x =2; Knick

---

d.)

x =-1 und x =1; Pol

-----

+++1.022

a.)

{{Es steht ein X in der Eingabemarke für das was zutrifft, ansonsten wurde nichts dargestellt.}}

x\_1:

stetig: X

differenzierbar: X

x\_2:

stetig:

differenzierbar:

x\_3:

stetig: X

differenzierbar:

x\_4:

stetig:

differenzierbar:

x\_5:

stetig: X

differenzierbar: X

x\_6:

stetig: X

differenzierbar: X

---

b.)

{{Es steht ein X in der Eingabemarke für das was zutrifft, ansonsten wurde nichts dargestellt.}}

x\_1:

stetig: X

differenzierbar: X

x\_2:

stetig: X

differenzierbar:

x\_3:

stetig:

differenzierbar:

x\_4:

stetig: X

differenzierbar:

x\_5:

stetig:

differenzierbar:

x\_6:

stetig:

differenzierbar:

-----

+++1.023

differenzierbar an der Stelle x\_0:

a.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: nein

---

b.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: ja

---

c.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: ja

---

d.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: nein

---

e.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: nein

---

f.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: ja

---

g.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: ja

---

h.)

differenzierbar an der Stelle x\_0: nein; ja

-----

j-246

+++1.024

a.)

Steigung: -2; Punkt: A

Steigung: -1; Punkt: C

Steigung: 0; Punkt: E

Steigung: 1; Punkt: B

Steigung: 2; Punkt: D

---

b.)

Steigung: -2; Punkt: B

Steigung: -1; Punkt: D

Steigung: 0; Punkt: A

Steigung: 1; Punkt: C

Steigung: 2; Punkt: E

---

c.)

Steigung: -2; Punkt: D

Steigung: -1; Punkt: B

Steigung: 0; Punkt: C

Steigung: 1; Punkt: A

Steigung: 2; Punkt: E

---

d.)

Steigung: -2; Punkt: E

Steigung: -1; Punkt: A

Steigung: 0; Punkt: B

Steigung: 1; Punkt: D

Steigung: 2; Punkt: C

-----

+++1.025

a.)

x: -2; Steigung: -4

x: -1; Steigung: 3

x: 0; Steigung: 2

x: 1; Steigung: -1

x: 2; Steigung: 0

---

b.)

x: -2; Steigung: 2

x: -1; Steigung: 0

x: 0; Steigung: -1

x: 1; Steigung: 3

x: 2; Steigung: -4

---

c.)

x: -2; Steigung: 3

x: -1; Steigung: -1

x: 0; Steigung: -4

x: 1; Steigung: 2

x: 2; Steigung: 0

---

d.)

x: -2; Steigung: 2

x: -1; Steigung: 3

x: 0; Steigung: 0

x: 1; Steigung: -4

x: 2; Steigung: -1

-----

+++1.026

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++1.027

a.)

f'(x) =4 \*x^3

kurz: (x^4)' =4 \*x^3

---

b.)

f'(x) =((4 \*x^3)/8) =(x^3)/2

kurz: ((x^4)/8)' =(x^3)/2

---

c.)

f'(x) =1

kurz: (x)' =1

---

d.)

f'(x) =0

kurz: (1)' =0

---

e.)

f'(x) =0

---

f.)

5 \*7 \*x^6 =35 \*x^6

---

g.)

f'(x) =5 \*1 =5

---

h.)

f'(x) ='pi \*1 ='pi

---

i.)

f'(x) =0

---

j.)

f'(x) =(3 \*7 \*x^6)/4 =(21 \*x^6)/4 =(21)/4 \*x^6

---

k.)

f'(x) =3/4

---

l.)

f'(x) =('pi)/4

-----

+++1.028

a.)

f'(x) =2 \*x +3

---

b.)

f'(x) =10 \*x -1/3

---

c.)

f'(x) =3 \*x^2 -2 \*x -1

---

d.)

f'(x) ==(x^3)/2 +3 \*x^2 -2

---

e.)

f'(x) =7/2 \*x^6 -1/3

---

f.)

30 \*x^5 -6 \*x^2

---

g.)

f'(x) ='w(3) \*5 \*x^4 +3 \*'pi \*x^2 -1

---

h.)

f'(x) =(18)/5 \*x^8 -16 \*x^3 -1/3

-----

+++1.029

a.)

f'(x) =6

---

b.)

f'(x) =45 \*x^4

---

c.)

f'(x) =3/5 \*x^2

---

d.)

f'(x) =72 \*x^3

---

e.)

f'(x) =1,8 \*x

---

f.)

f'(x) ='w(2)

---

g.)

f'(x) =x

---

+++1.030

a.)

f'(-2) =-1; f ist an der Stelle x=-2 fallend.

f'(0) =3; f ist an der Stelle x =0 steigend.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

f'(-2) =-2; f ist an der Stelle x=-2 fallend.

f'(0) =0; f hat an der Stelle x =0 eine horizontale Tangent.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

f'(-2) =4; f ist an der Stelle x=-2 wachsend.

f'(0) =0; f hat an der Stelle x =0 eine horizontale Tangente.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

f'(-2) =0; f hat an der Stelle x =-2 eine horizontale Tangente.

f'(0) =1; f ist an der Stelle x =0 steigend.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

j-248

+++1.031

a.)

f'(x) =-4x -4

---

b.)

f'(x) =6x -12

---

c.)

f'(x) =2x +8

---

d.)

f'(x) =10x -6

---

e.)

f'(x) =2x +1

---

f.)

f'(x) =-28x -88

-----

+++1.032

f(x) =-x -(13)/(12);

f(x) =-1/6 x +1;

f(x) =x -(37)/(12)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++1.033

f(x) =-48 \*x -148;

f(x) =16 \*x +12;

f(x) =-16 \*x +12;

f(x) =48 \*x -148

-----

+++1.034

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Die mittlere Änderungsrate kann auch als Steigung der Sekante durch die zwei Punkte A(1|y\_0) und B(3|y\_1) interpretiert werden.

y\_0 =f(1) =1 -4 -1 +4 =0

y\_1 =f(3) =27 -36 -3 +4 =-8

('De y)/('De x) =(f(x\_1) -f(x\_0))/(x\_1 -x\_0) =(f(3) -f(1))/(3 -1) =(-8 -0)/2 =(-8)/2 =-4

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f und damit die Steigung der Sekante im Intervall [1; 3] beträgt -4.

---

c.)

Die lokale Änderungsrate oder die erste Ableitung f'(1) kann auch als Steigung der Tangente im Berührpunkt T(1|f(1)) interpretiert werden.

f'(x) =3 \*x^2 -8 \*x -1

f'(1) =3 -8 -1 =-6

Die momentane Änderungsrate der Funktion f und damit die Steigung der Tangente an der Stelle x =1 ist -6.

---

d.)

Die Steigung der Funktion f an der Stelle x\_0 entspricht der ersten Ableitung f'(x\_0).

Rechnerische Lösung:

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 1 hat.

Somit ist die Gleichung f'(x) =1, d. h., 3 \*x^2 -8 \*x -1 =1 zu lösen.

3 \*x^2 -8 \*x -1 =1

3 \*x^2 -8 \*x -2 =0

x\_(1; 2) =(-b +-'w(b^2 -4a \*c))/(2a) =(8 +- 'w(63 -4 \*3 \*(-2)))/6 =(8 +-'w(88))/6 ~~(8 +-9,38)/6

x\_1 ~~-0,23

x\_2 ~~2,897

An den Stellen x\_1 ~~-0,23 und x\_2 ~~2,9 hat die Funktion jeweils die Steigung 1.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ableitungsfunktion f' mit der Funktion mit y =1.

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

An den Stellen x\_1 ~~-0,23 und x\_2 ~~2,9 hat die Funktion jeweils die Steigung 1.

---

e.) Rechnerische Lösung:

Horizontale Geraden haben die Steigung 0.

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 0 hat.

Somit ist die Gleichung f'(x) =0, d. h., 3 \*x^2 -8 \*x -1 =0 zu lösen.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse (y =0).

An den Stellen x\_1 ~~-0,12 und x\_2 ~~2,79 hat die Funktion jeweils horizontale Tangenten.

-----

j-249

+++1.035

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

A(-3|0,2); B(-2|(23)/(15))

mittlere Änderungsrate ('De y)/('De x) =((23)/(15) -1/5)// (-2 -(-3)) =(4/3)// 1 =4/3 ~~1,333

---

c.)

Ableitungsfunktion f mit f'(x) =x^2 +8/5 \*x -1

lokale Änderungsrate f'(-3) =(-3)^2 +8/3 \*(-3) -1 =3,2

---

d.)

Die Steigung der Funktion f an der Stelle x\_0 entspricht der ersten Ableitung f'(x\_0).

Rechnerische Lösung:

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 1 hat. Somit ist die Gleichung x^2 +8/5 \*x -1 =1 zu lösen.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ableitungsfunktion f' mit der Funktion mit y =1.

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

An den Stellen x\_1 ~~0,8248 und x\_2 ~~-2,4248 ist die Steigung der Funktion f gleich 1.

---

e.)

Rechnerische Lösung:

Horizontale Geraden haben die Steigung 0.

Zu berechnen ist, an welchen Stellen die Ableitungsfunktion f' den Wert 0 hat. Somit ist die Gleichung x^2 +8/5 \*x -1 =0 zu lösen.

Grafische Lösung:

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ableitungsfunktion f' mit der x-Achse (y =0).

An den Stellen x\_1 ~~0,4806 und x\_2 ~~-2,0806 ist die Steigung der Funktion f gleich 0.

-----

+++1.036

a.)

('ds)/('dt) =6 \*t +1

---

b.)

('df)/('dz) =z -4

---

c.)

('dK)/('dq) =0,2 \*q -0,5

---

d.)

('dC)/('da) =40 \*a^2

---

e.)

('dh)/('dt) =-10 \*t +75

---

f.)

('dA)/('dr) =5 \*'pi

---

g.)

('dV)/('dh) =('pi)/3 \*(12 \*h -3 \*h^2)

---

h.)

('dA)/('dr) =2 \*(2 \*r \*'pi +3 \*'pi)

-----

+++1.037

a.)

('dA)/('da) =2 \*a

('dA)/('dA)|\_[a =500] =2 \*500 =1000

---

b.)

('dV)/('da) =3 \*a^2

('dV)/('da)|\_[a =100] =3 \*100^2 =30000

--

c.)

('dO)/('dr) =8 \*r \*'pi

('dO)/('dr)|\_[r =200] =8 \*200 \*'pi =1600 \*'pi

---

d.)

('dv)/('dt) =5

('dv)/('dt)|\_[t =10] =5

---

e.)

('ds)/('dt) =6 \*t +5

('ds)/('dt)|\_[t =3] =6 \*3 +5 =23

('d^2s)/('dt^2) =6

('d^2s)/('dt^2)|\_[t =3] =6

-----

j-250

+++1.038

G'(250) =-8 ist die lokale Änderungsrate von G bei x =250.

Interpretation: Ändert man bei x =250 Mengeneinheiten den Wert von x um eine Mengeneinheit, dann ändert sich der Wert von G näherungsweise um -8 Geldeinheiten.

-----

+++1.039

('dK)/('dq)|\_[q =2000] =120 ist die lokale Änderungsrate von K bei q =2000.

Interpretation: Ändert man bei q =2000 Tonnen den Wert von q um eine GE/t, dann ändert sich der Wert von K näherungsweise um 120 Geldeinheiten.

-----

+++1.040

('dq)/('dp)|\_[q =150] =3 ist die lokale Änderungsrate von q bei p =150.

Interpretation: Ändert man bei p =150 GE/t den Wert von p um eine GE/t, dann ändert sich der Wert von q näherungsweise (linear) um 3 GE.

-----

+++1.041

a.)

f''(x) =140x^3 -18x +2

---

b.)

f'''(x) =24x +18

-----

+++1.042

a.)

f'(x) =2x -2;

f''(x) =2;

f'''(x) =0

---

b.)

f'(x) =3x^2 +6x -4;

f''(x) =6x +6;

f'''(x) =6;

f^[4](x) =0

-----

+++1.043

('dy)/('dx) =12 \*x^2 -12 \*x;

('d^2y)/('dx^2) =24 \*x -12

a.)

x^2 \*('d^2y)/('dx^2) -2 \*x \*('dy)/('dx) -12 \*x =x^2 \*(24 \*x -12) -2 \*x \*(12 \*^2 -12 \*x) -12 \*x^2 =24 \*x^3 -12 \*x^2 -24 \*x^3 +24 \*x^2 -12 \*x^2 =0

Richtig!

---

b.)

12 \*x^2 -12 \*x =0

12 \*x \*(x -1) =0

d.h. x\_1 =0 und x\_2 =1

---

c.)

24 \*x -12 =0

2 \*x -1 =0

x =0,5

-----

+++1.044

a.) und b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

f'(x) =3 \*x^2 -6 \*x;

3 \*x^2 -6 \*x =0;

x \*(x -2) =0;

x\_1 =0 und x\_2 =2

---

d.)

f''(x) =6 \*x -6;

6 \*x -6 =0;

x -1 =0;

x =1

-----

+++1.045

a.)

('De U)/('De t) =(76 -27)/(20 -10) =(49)/(10) =4,9

Ausgehend von der 10. Woche steigt die Absatzmenge pro Woche um 4,9 ME.

In der 11. Woche ist die Absatzmenge ca. U(11) ~~U(10) +4,9 =27 +4,9 =31,9 ME.

---

b.)

Die Steigung der Sekante entspricht der mittleren Änderungsrate im Intervall [10; 20].

---

c.)

('dU)/('dt) =0,01 \*(70 \*t -2,4 \*t^2);

('dU)/('dt)|[t =10] =4,6

Der berechnete Wert ist die momentane Änderungsrate an der Stelle 10.

Der Wert entspricht der Steigung der Tangente an die Funktion U. Mit dem berechneten Wert lässt sich ein Näherungswert für die Absatzmenge der 11. Woche schätzen:

U(11) ~~U(10) +4,6 =27 +4,6 =31,6 ME

---

d.)

Der Ausdruck gibt die momentane Änderungsrate an der Stelle 40 an.

Der Wert entspricht der Steigung der Tangente an die Funktion U an der Stelle 40.

('dU)/('dt)|\_[t =40] =-10,4

Näherungswert für die Absatzmenge der 41. Woche:

U(41) ~~U(40) -10,4 =48 -10,4 =37,6 ME

---

e.)

x ~~44; Ab der 44. Woche kann das Produkt nicht mehr abgesetzt werden.

-----

j-251

+++1.046

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

{{Tabelle aufgelöst}}

x in cm: 0

V(x) in cm^3: 0

---

x in cm: 1

V(x) in cm^3: 414

---

x in cm: 2

V(x) in cm^3: 672

---

x in cm: 3

V(x) in cm^3: 798

---

x in cm: 4

V(x) in cm^3: 816

---

x in cm: 5

V(x) in cm^3: 750

---

x in cm: 6

V(x) in cm^3: 624

---

x in cm: 7

V(x) in cm^3: 462

---

x in cm: 8

V(x) in cm^3: 288

---

x in cm: 9

V(x) in cm^3: 126

---

x in cm: 10

V(x) in cm^3: 0

---

x ~~3,7 cm;

V\_(Max) ~~820 cm^3;

[0; 10];

[3,7; 10]

---

b.)

(V(8) -V(6))/(8 -6) =(288 -624)/(8 -6) =(-336)/2 =-168 (cm^3)/(cm)

Im Intervall [6; 8] nimmt das Volumen der Schachtel im Durchschnitt um 168 cm^3 pro cm Höhenzunahme ab.

---

c.)

Richtig ist C.

---

d.)

V'(6) =-148 (cm^3)/(cm)

Die Tangente an die Funktion V an der Stelle 6 hat die Steigung -148.

Vergrößert man die Höhe x um 1 cm, dann ändert sich das Volumen um ca. -148 cm^3.

-----

+++Z 1.1

a.)

Einheit: (L/(100) km)// ((km)/h)

---

b.)

Wenn man bei 50 km/h die Geschwindigkeit um 1 km/h (von 50 km/h auf 51 km/h) erhöht, dann steigt der Treibstoffverbrauch um 0,03 (L/(100) km)// ((km)/h).

-----

+++Z 1.2

a.)

f(14) Anzahl der Teilnehmer im Jahr 2014

---

b.)

Mittlere Änderungsrate:

(f(15) -f(5))/(15 -5) =(5959 -5233)/(10) =72,6

-----

+++Z 1.3

f\_1: Ableitung: B

f\_2: Ableitung: D

f\_3: Ableitung: A

f\_4: Ableitung: C

-----

+++Z 1.4

a.)

(E(10) -E(0))/(10 -0) =(146,8 -1)/(10) =14,58

---

b.)

Richtig ist B.

---

c.)

E'(t) =-0,021 \*t^2 +1,38 \*t +8,38;

E'(10) =20,08

In der 11. Woche nimmt die Anzahl der Erkrankten um ca. 20000 Personen zu.

---

d.)

E'(10) entspricht der Zunahme an der Stelle 10.

Die Funktion ändert aber auch innerhalb der 11. Woche ihre Steigung, sodass der Funktionswert E(11) ungefähr gleich E(10) +E'(10) ist.

---

e.)

In a) wird die durchschnittliche Zunahme der Erkrankten innerhalb der ersten 10 Wochen der Ausbreitung der Grippe berechnet.

E'(10) beschreibt hingegen die momentane Zunahme an der Stelle 10.

-----

j-252

+++Z 1.5

a.)

Ende der 10. bis zum Ende der 20. Woche:

(m(20) -m(10))/(10) ~(250 -50)/(10) =20

Ende der 20. bis zum Ende der 30. Woche:

(m(30) -m(20))/(10) ~~(1350 -250)/(10) =110

Ende der 30. bis zum Ende der 40. Woche:

(m(40) -m(30))/(10) ~~(3450 -1350)/(10) =210

Die Massenzunahme des Embryos beträgt vom Ende der 10. bis zum Ende der 20. Woche ca. 20 g pro Woche.

Im Zeitraum vom Ende der 20. bis zum Ende 30. Woche nimmt der Embryo ca. 110 g pro Woche zu und vom Ende der 30. bis zum Ende der 40. Woche ca. 210 g/Woche.

Die Massenzunahme steigt mit der Schwangerschaftswoche an.

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Steigung der Tangente beträgt ca. 100. Am Ende der 25. Woche beträgt die momentane Massenzunahme ca. 100 g pro Woche. In der 26. Woche nimmt der Embryo daher ungefähr 100 g zu.

-----

## !!2 Eigenschaften von Polynomfunktionen

+++2.001

f'(x) =0 und f''(x) >0

Punkt D

f(x) >0 und f''(x) >0

Punkt E

f(x) <0 und f'(x) >0

Punkt A

f'(x) <0 und f''(x) >0

Punkt C

f(x) >0 und f''(x) <0

Punkte B, G, H

-----

+++2.002

Punkt: E; f(x) <0; f'(x) =0; f''(x) >0

Punkt: C; f(x) >0; f'(x) <0; f''(x) <0

Punkt: A; f(x) >0; f'(x) >0; f''(x) <0

Punkt: G; f(x) =0; f'(x) =0; f''(x) <0

Punkt: F; f(x) <0; f'(x) >0; f''(x) >0

Punkt: D; f(x) <0; f'(x) <0; f''(x) >0

Punkt: B; f(x) >0; f'(x) =0; f''(x) <0

-----

+++2.003

Punkt: A; f(x) <0; f'(x) <0; f''(x) >0

Punkt: B; f(x) <0; f'(x) =0; f''(x) >0

Punkt: C; f(x) <0; f'(x) >0; f''(x) >0

Punkt: D; f(x) >0; f'(x) >0; f''(x) <0

Punkt: E; f(x) >0; f'(x) =0; f''(x) <0

Punkt: F; f(x) >0; f'(x) <0; f''(x) <0

Punkt: G; f(x) >0; f'(x) =0; f''(x) >0

j-253

+++2.004

a.)

P(x) =-3 <0, f streng monoton fallend auf K

---

b.)

f'(x) =2x

f'(x) >0 für x <0, f streng monoton steigend für x >=0

f'(x) <0 für x <0, f streng monoton fallend für x <=0

---

c.)

f'(x) =-2x +2

f'(x) =0 für x =1

f'(x) >0 für x <1, f streng monoton steigend für x <=1

f'(x) <0 für x >1, f streng monoton fallend für x >=1

---

d.)

f(x) =3x^2 <0 für x \=0, f streng monoton steigend auf 'R

---

e.)

f'(x) =3x^2 -3

f'(x) =0 für x\_1 =1 und x\_2 =1

f'(x) >0 für x <-1 und x >1, f streng monoton steigend für x <=-1 und x >=1

f'(x) <0 für -1 <x <1, f streng monoton fallend für -1 <=x <=1

-----

+++2.005

Aus Platzgründen werden f, P, und P' in einem Koordinatensystem dargestellt.

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.006

a.)

y' =2x;

y'' =2

f(-1) =0;

f'(-1) =-2; -2 <0 daher f streng monoton fallend

f''(-1) =2; 2 >0 daher Linkskrümmung

f(0) =-1

f'(0) =0; horizontale Tangente

f''(0) =2; 2>0 daher Linkskrümmung; T(0|-1)

f(1) =0; N(1|0)

f'(1) =2; 2 >0 daher f streng monoton steigend

f''(1) =2; 2>0 daher Linkskrümmung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

y' =-2x -2;

y'' =-2

f(-1) =2

f'(-1) =0; horizontale Tangente

f''(-1) =-2; -2 <0 daher Rechtskrümmung; H(-1|2)

f(0) =1

f'(0) =-2; -2 <0 daher streng monoton fallend

f''(0) =-2; -2 <0 daher Rechtskrümmung

2 <0 daher Linkskrümmung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

y' =3x^2 -1;

y'' =6x

f(-1) =0; N(-1|0)

f'(-1) =2; 2 >0 daher f streng monoton steigend

f''(-1) =-6; -6 <0 daher Rechtskrümmung

f(0) =0; N(0|0)

f'(0) =-1; -1 <0 daher streng monoton fallend

f''(0) =0; Wendepunkt (0|0)

f(1) =0; N(1|0)

f'(1) =2; 2 >0 daher f streng monoton steigend

f''(1) =6; 6 >0 daher Linkskrümmung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

y' =3x^2 -3;

y'' =6x

f(-1) =2

f'(-1) =0; waagrechte Tangente

f''(-1) =-6; -6 <0 daher Rechtskrümmung; H(-1|2)

f(0) =0; Nullstelle

f'(0) =-3; -3 <0 daher streng monoton fallend

f''(0) =0; Wendepunkt W(0|0)

f(1) =-2

f'(1) =0; waagrechte Tangente

f''(1) =6; 6 >0 daher Linkskrümmung; T(1|-2)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

e.)

y' =(x^2)/2;

y'' =x

f(-1) =7/3

f'(-1) =-1; -1 <0 daher f streng monoton fallend

f''(-1) =-1; -1 <0 daher Rechtskrümmung

f(0) =1

f'(0) =-3/2; -3/2 <0 daher f streng monoton fallend

f''(0) =0; Wendepunkt W(0|1)

f(1) =-1/3

f'(1) =-1; -1 <0 daher f streng monoton fallend

f''(1) =1; 1 >0 daher Linkskrümmung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

f.)

y' =4x^3;

y'' =12x^2

f(-1) =1

f'(-1) =-4; -4 <0 daher f streng monoton fallend

f''(-1) =12; 12 >0 daher Linkskrümmung

f(0) =0; N(0|0)

f'(0) =0; horizontale Tangente

f''(0) =0

f'''(0) =0 Krümmungsverhalten ändert sich nicht.

Es liegt kein Wendepunkt vor: T(0|0)

f(1) =1

f'(1) =4; 4 >0 daher f streng monoton steigend

f''(1) =12; 12 >0 daher Linkskrümmung

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

j-254

+++2.007

a.)

f hat bei x\_0 =1 einen positiven Funktionswert, f ist steigend mit der Steigung k =1 und linksgekrümmt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

f hat bei x\_0 =-1 eine Nullstelle,

f ist fallend mit der Steigung k =-1 und linksgekrümmt.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

f hat bei x\_0 =-2 einen negativen Funktionswert mit horizontaler Tangente, f ist dort rechtsgekrümmt, f hat also bei x\_0 =-2 einen relativen Hochpunkt H(-2|-1).

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

f hat bei x\_0 =3 einen positiven Funktionswert mit horizontaler Tangente, f ist dort linksgekrümmt, f hat also bei x\_0 =3 einen relativen Tiefpunkt T(3|1).

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

j-255

+++2.008

a.)

D

---

b.)

D

---

c.)

C

---

d.)

B

-----

+++2.009

a.)

T(2,5|-0,25);

f''(2,5) =2 >0;

keine Wendepunkte, da f''(x) \=0

---

b.)

H(2|4); f''(2) =-2 <0; keine Wendepunkte, da f''(x) \=0

---

c.)

T(3|0); f''(3) =6 >0

H(1|4); f''(1) =-6 <0

W(2|2); t: y =-3 \*x +8

---

d.)

T(-2|-28); f''(-2) =18 >0

H(4|80); f''(4) =-18 <0

W(1|26); f'(1) =k =27; t: y =27 \*x -1

---

e.)

H(-1|18); f''(-1) =-10 <0

T(7/3|-(14)/(27)); f''(7/3) =10 >0

W(2/3|(236)/(27)); k =-(25)/3; t: y =-(25)/3 x +(386)/(27)

---

f.)

T(-1,812|0,607); f''(-1,812) =3,09 >0

H(0|2); f''(0) =-2 <0

T(3,312|-4,997); f''(3,312) =5,65 >0

W\_1(-1|5/4); k\_1 =7/6; t\_1: y =7/6 x +(29)/(12);

W\_2(2|-2); k\_2 =-(10)/3; t\_2: y =-(10)/3 x +(14)/3

---

g.)

H(-2,828|9,051); f''(-2,828) =-16,97 <0

S(0|0); f''(0) =0

T(2,828|-9,051); f''(2,828) =16,97 >0

W\_1(-2|5,6); k\_1 =-6; t\_1: y =-6x -6,4;

W\_2(0|0); k\_2 =0; t\_2: y =0;

W\_3(2|-5,6); k\_3 =-6; t\_3: y =-6x +6,4

-----

+++2.010

a.)

N\_1(-2|0);

N\_2(6|0);

Y(0|3);

H(2|4)

---

b.)

T(0|1) =Y

---

c.)

N\_1(-3|0);

N\_2(6|0);

Y(0|4) =H;

T(6|0);

W(2|3);

t: y =-x +5

---

d.)

N(0|0);

keine Extrema;

W(0|0);

t: y =x

---

e.)

N\_1(-6|0);

N\_2(0|0) =Y;

H(-4|(16)/3);

T(0|0);

W(-2|8/3);

t: y =-2x -4/3

---

f.)

N\_1(-2 \*'w(3)|0);

N\_2(0|0);

N\_3(2 \*'w(3)|0);

H(-2|4);

T(2|-4);

W(0|0);

t: y =-3x

---

g.)

N\_1(-4,606|0);

N\_2(0|0);

N\_3(2,606|0);

T(-3,312|-6,997);

H(0|0);

T(1,812|-1,393);

W\_1(-2|-4);

t\_1: y =(10)/3 x +8/3;

W\_2(1|-0,75);

t\_2: y =-7/6 x +5/(12)

---

h.)

N\_1(-4|0);

N\_2(-2 \*'w(2)|0);

N\_3(2 \*'w(2)|0);

N\_4(4|0);

T\_1(-2 \*'w(3)|-2/3);

H(0|(16)/2);

T\_2(2 \*'w(3)|-2/3);

W\_1(-2||2);

t\_1: < =8/3 x +(22)/3;

W\_2(2|2);

t\_2: y =-8/3 x +(22)/3

-----

+++2.011

a.)

Startpunkt (0|225) und Endpunkt (500|0)

Differenzenquotient: (0 -225)/(500 -0) =-0,45

Die Skipiste hat ein durchschnittliches Gefälle von 45 %.

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Piste ist im Punkt (240|112) am steilsten. Ihr Gefälle beträgt hier -62 %.

Das entspricht einem Winkel von 31,8°.

---

c.)

Es handelt sich um den Wendepunkt der Funktion.

Begründung: Die Neigung bzw. Steigung der Funktion ist durch ihre erste Ableitung h' festgelegt.

Ein Extremum der ersten Ableitungsfunktion liegt an der Stelle x\_0 dann vor, wenn deren Ableitung gleich null ist, d. h., wenn h''(x\_0) =0. Damit hat die Funktion h an der Stelle x\_0 einen Wendepunkt.

Die Berechnung der Stelle x\_0 des Wendepunkts erfolgt durch Lösen der Gleichung h''(x) =0.

Die y-Koordinate des Punktes erhält man durch Einsetzen von x\_0 in die Funktion h.

---

d.)

Falls die Funktion h streng monoton fallend ist, muss der Graph der Ableitung h' unterhalb der x-Achse liegen. h'(x) <0

-----

j-256

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Anfangshöhe =h(0) =200 m

---

c.)

Steigung =h'(0) =-0,1;

Neigungswinkel ='tan^(-1)(-0,1) ~~-5,71°

---

d.)

Zu berechnen ist der x-Wert für den gilt: h'(x) -> Max., d. h. h''(x) =0

0,0000168 \*x -0,004 =0;

x ~~238,1 m; h(238,1) ~~100,6 m

---

e.)

Steigung =h'(238,1) ~~-0,576; Neigungswinkel =tan-1(-0,576) ® -29,95°

---

f.)

Die Steigung der Piste ist durch die Ableitungsfunktion h' definiert.

Hat die Ableitungsfunktion h' an der Stelle x\_0 einen Extremwert, dann ist an dieser Stelle h''(x\_0) =0 und die Piste mit der Funktion h hat an dieser Stelle x\_0 einen Wendepunkt.

---

g.)

Steigung =h'(500) ~~0;

Neigungswinkel ='tan^(-1)(0) =0°

---

h.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Im gegebenen Intervall liegt die Funktion h' zur Gänze unterhalb der x-Achse.

-----

+++2.013

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Abwurfhöhe: h(0) =1,7 m

---

c.)

Abwurfwinkel: k =h'(0) =0,5;

a ='tan^(-1)(0,5) ~~26,57°

---

d.)

h'(x) =0;

maximale Flughöhe =2,48 m;

H(3,125|2,48)

---

e.)

h(x) =0;

Wurfweite =8,69 m

---

f.)

Aufprallwinkel: k =h'(8,69) =-0,891;

a ='tan^(-1)(-0,891) ~~-41,7°

-----

+++2.014

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

-9 cm pro m;

-3 cm pro m

---

c.)

200 m

---

d.)

1,146°

---

e.)

2,93 m

-----

j-257

+++2.015

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Ertrag ohne Dünger: ca. 10 Zentner

---

b.)

Maximaler Ertrag von ca. 28 Zentner pro ha bei einer Düngung von 9 kg/ha

---

c.)

Der Ertragszuwachs wird durch die Funktion E' beschrieben.

Deren Maximum liegt an der Stelle mit E''(x) =0, also am Wendepunkt der Funktion E.

W(4|18,75)

---

d.)

Die Steigung der Wendetangente beträgt ca. (8,25)/3 =2,75.

Der maximal mögliche Erntezuwachs beträgt etwa 2,8 Zentner pro kg Düngemittel.

-----

+++2.016

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Der Prozentsatz der Erkrankten steigt in den ersten 10 Wochen auf einen maximalen Wert von 25 % an und sinkt in den folgenden 5 Wochen wieder auf den Wert null ab.

---

b.)

t =10 d;

25 % Kranke

---

c.)

Nach 5 Wochen ist der Zuwachs des Anteils der Erkrankten maximal.

Die momentane Änderungsrate der Erkrankten nach 5 Wochen ist 3,75 % pro Woche.

Der Anteil der Erkrankten steigt von Woche 5 auf Woche 6 um ca. 3,75 %.

---

d.)

Der größte Zuwachs tritt auf, wo die Steigung von p maximal ist.

Die Ableitungsfunktion ('dp)/('dt) muss somit maximal sein.

Hat die Ableitungsfunktion ('dp)/('dt) an der Stelle t\_0 einen Extremwert, dann ist an dieser Stelle p''(t\_0) =0 und die Funktion p hat an dieser Stelle t\_0 einen Wendepunkt.

---

e.)

p'(12) =-3,6 ist die momentane Änderungsrate der Funktion p 12 Wochen nach Beginn der Grippewelle.

Der Anteil der Erkrankten nimmt zu diesem Zeitpunkt pro Woche um ca. 3,6 % ab.

---

f.)

Nach ca. 15 Wochen ist die Grippewelle beendet.

-----

+++2.017

Gerade g: y =-5/4 \*x +5 mit Steigung k =-5/4

Steigungen f'(0) =-5/4 und f'(4) =-5/4 berechnen und Übereinstimmung mit der Geradensteigung überprüfen.

Die Werte stimmen überein und somit ist g in A und B Tangente an f.

-----

+++2.018

Da drei Bestimmungsstücke gegeben sind, liegen Polynomfunktionen zweiten Grades vor.

a.)

f(x) =(x^2)/4 +x/2 +9/4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

f(x) =(x^2)/4 -x/2 -3/4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

f(x) =(-3x^2)/4 -3x -4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

f(x) =(x^2)/4 -3x)/2 +(13)/4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

j-258

+++2.019

Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion Punkte mit möglichst ganzzahligen Koordinaten ab. Auch andere als die angegebenen Lösungsansätze sind möglich.

a.)

Ansatz: quadratische Funktion

Punkt (0|1) 'el Graph von f: f(0) =1;

Punkt (1|2) 'el Graph von f: f(1) =2

Extremum an der Stelle x =1: P(1) =0; f(x) =-x^2 +2 \*x +1

---

b.)

Ansatz: quadratische Funktion

Punkt (0|2) 'el Graph von f: f(0) =2;

Punkt (-2|0) 'el Graph von f: f(-2) =0

Extremum an der Stelle x =-2: f'(-2) =0; f(x) =1 \*x^2 +2 \*x +2

---

c.)

Ansatz: kubische Funktion

Punkt (0|1) 'el Graph von f: f(0) =1;

Punkt (-1|2) 'el Graph von f: f(-1) =2

Extremum an der Stelle x =-1: f'(-1) =0

Extremum an der Stelle x =1: P(1) =0; f(x) =(x^2)/2 -(3 \*x)/2 +1

---

d.)

Ansatz: kubische Funktion

Punkt (0|2) 'el Graph von f: f(0) =2;

Punkt (2|0) 'el Graph von f: f(2) =0

Extremum an der Stelle x =0: f'(0) =0

Extremum an der Stelle x =4: f(4) =0; f(x) =(x^3)/8 -(3 \*x^2)/4 +2

-----

+++2.020

a.)

(0|5) 'el Graph von f: f(0) =5;

(1|5) 'el Graph von f: f(1) =5;

(-1|11) 'el Graph von f: f(-1) =11

Steigung an der Stelle x =0 ist k =-2: P(0) =-2 f(x) =-x^3 +3 \*x^2 -2 \*x +5

---

b.)

(-2|-10) 'el Graph von f: f(-2) =-10;

(-1|-2) 'el Graph von f: f(-1) =-2;

(1|2) 'el Graph von f: f(1) =2

Steigung an der Stelle x =1 ist k =4: f'(1) =4

f(x) =x^3 +x

---

c.)

f(-2) =0;

f(-1)=0;

f(0) =0 --> d =0;

f(3) =0;

f(x) =x^4 -7 \*x^2 -6 \*x;

'al =-86,4°

-----

+++2.021

f(0) =2;

f(3) =4;

f'(3) =0;

f''(-5) =0

f(x) =-2/(189) x^2 -(10)/(63) x^2 +(26)/(21) x +2

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.022

f(-1) =0;

f\*(0) ='tan(45°) =1;

f(1) =4;

f'(1) =0

f(x) =x^3 -2 \*x^2 +x +4

-----

+++2.023

f(1) =0;

f'(1) ='tan(99,4623) =-6

f(0) =4;

f'(0) =0

f(x) =x^4 -5x^2 +4

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.024

f(1) =5;

f'(1) =0;

f(2) =3;

f''(2) =0

f(x) =x^3 -6 \*x^2 +9 +x +1

-----

+++2.025

f(-2) =1;

f'(-2) ='tan(-45) =-1

f''(-2) =0;

f(0) =0

f =1/8 x^3 +3/4 x^2 +1/2 x

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.026

f(-3) =-1

f(1) =1;

f''(1) =0

f'(3) =0

f(x) =1/8 x^3 -3/8 x^2 -9/8 x +(19)/8

-----

+++2.027

f(1) =0;

f'(1) ='tan(104,0362) =-4

f'(0) =2;

f(-2) =39

f(x) =-4x^3 +3x^2 +2x -1

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.028

h(x) =a \*x^2 +b \*x +c

h'(x) =2 \*a \*x +b

h(0) =0;

h(60) =40;

h'(60) =0;

h(x) =4/3 \*x -1/(90) \*x^2

-----

j-259

+++2.029

h(x) =a \*x^2 +b \*x +c

h'(x) =2 \*a \*x +b

h(0) =0;

h(40) =8;

h'(40) =0;

h(x) =5 \*x -1/(200) x^2

-----

+++2.030

h(x) =a \*x^2 +b \*x +c

h'(x) =2 \*a \*x +b

h(0) =0;

h(0,5) =0,8;

h'(0,5) =0;

h(x)=3,2 \*x -3,2 \*x^2

-----

+++2.031

a.)

Der Faktor a beeinflusst nur die Höhe der Flugbahn und damit die Scheitelhöhe.

Er hat keinen Einfluss auf die Flugweite.

---

b.)

Zu berechnen sind die Schnittpunkte der Funktion h mit der x-Achse.

h(x) =0

a \*(0,5 \*x -0,008 \*x^2) =0 | /a

x \*(0,5 -0,008 \*x) =0;

x\_1 =0 und x\_2 =62,5

Die Flugweite ist 62,5 m.

Dividiert man die Gleichung a \*(0,5 \*x -0,008 \*x^2) =0 durch a, ist die zu lösende Gleichung von a unabhängig. Somit ist auch die Flugweite unabhängig von a.

---

c.)

h(31,25) =3

a \*(0,5 \*31,5 -0,008 \*31,52) =3;

a =0,384

---

d.)

h'(0) =k =0,192;

a ='tan^(-1)(0,192) =10,87°

---

e.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.032

f(0) =0;

f'(0) =0;

f(300) =10;

f'(300) =0;

f(x) =-(x^3)/(1350000) +(x^2)/(3000)

-----

+++2.033

a.)

(1) f(0) =0;

f'(0) =0;

f(1) =1;

f'(1) =1;

f'(1) =0;

f(x) =-2 \*x^3 +3 \*x^2

(2)

f(0) =0;

f'(0) =0;

f(1) =1;

f\*(1) =1;

f(x) =-x^3 +2 \*x^2

(3)

f(0) =0;

f'(0) =-1;

f(2) =1;

f'(2) =1;

f(x) =-(x^3)/4 +(5 \*x^2)/4 -x

---

b.)

(1)

f(0) =0;

f'(0) =0;

f''(0) =0;

f(1) =1;

f'(1) =0;

f''(1) =0;

f(x) =6 \*x^5 -15 \*x^4 +10 \*x^3

(2)

f(0) =0;

f'(0) =0;

f''(0) =0;

f(1) =1;

f'(1) =1;

f''(1) =0;

f(x) =3 \*x^5 -8 \*x^4 +6 \*x^3

(3)

f(0) =0;

f'(0) =-1;

f''(0) =0;

f(2) =1;

f'(2) =1;

f''(2) =0;

f(x) =3/(16) \*x^5 -(17)/(16) \*x^4 +7/4 \*x^3 -x

-----

+++2.034

a.)

E(0) =1 t/ha

Bei einer Düngermenge von 0 kg/ha ist der Ernteertrag 1 t/ha.

---

b.)

H(100) =2 t/ha

Bei einer Düngermenge von 100 kg/ha ist der Ernteertrag maximal.

---

c.)

Verwenden Sie zur Berechnung möglichst Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

E(0) =1 --> d =1

E(100) =2 --> 10^6 \*a +10^4 \*b +100 \*c +d =2

E'(100) =0 --> 30000 \*a +200 \*b +c

E(50) =1,5 --> 125000 \*a +2500 \*b +50 \*c +d =

oder alternativ E(150) =1

---

d.)

E(x) =-1/(500000) \*x^3 +3/(10000) \*x^2 +1

---

e.)

1 \*(1 +i) =2 --> i =100 %, d. h. Ertragssteigerung um 100 %

---

f.)

Die Steigung der Funktion E muss maximal sein.

Zu berechnen ist der x-Wert, für den gilt:

E'(x) --> Max, d. h. E''(x) =0

x =50 kg/ha; E(50) =1,5 t/ha

Bei einer Düngermenge von 50 kg/ha ist die Zuwachsrate maximal.

E'(50) =0,015 t/kg gibt die lokale Änderungsrate des Ernteertrages an.

---

g.)

Hat die Ableitungsfunktion E' an der Stelle x\_0 einen Extremwert, dann ist an dieser Stelle E''(x\_0) =0 und die Ertragsfunktion E hat an dieser Stelle x\_0 einen Wendepunkt.

---

h.)

E'(50) =0,015 t/kg bedeutet:

Vergrößert man die Düngermenge um 1 kg pro ha von 50 kg/ha auf 51 kg/ha, ändert sich der Ernteertrag um ca. 0,015 t pro kg.

---

i.)

Zu lösen ist die Gleichung E(x) =0 x ~~167,8

Ab einem Düngereinsatz von ca. 167,8 kg/ha ist der Ertrag null.

-----

j-260

+++2.035

h(x) =a \*x^2 +b \*x +c

h'(x) =2 \*a \*x +b

h(0) =0 --> c =0;

h'(x\_0) =0 --> x\_0 =b/(2 \*a);

h(80) =0 --> b =-80 \*a

x\_0 =(-80 \*a)/(2 \*a) =40 --> Der Scheitelpunkt liegt genau über der Mitte der Flugbahn.

h(x\_0) =8 \*a \*x\_0^2 +b \*x\_0 =8

--> a =-1/(100) und b =2/5

h(x) =2/5 \*x -1/(200) \*x^2

-----

+++2.036

f(0) =5;

f(4) =0;

f(1) =3;

f'(0) =-5/4;

f'(4) =-5/4,

Gerade g: y =-5/4 \*x +5

f(x) =-1/12) \*x^4 +2/3 \*x^3 -4/3 \*x^2 -5/4 \*x +5 (für 0 <=x <=4)

-----

+++2.037

a.)

f(0) =-4;

f(103) =-60;

f'(103) ='tan(-34,34);

f''(103) =0

f(x) =0,00001315 \*x^3 -0,004063 \*x^2 -0,2647 \*x -4; vereinfachtes Modell

---

b.)

K ist der Wendepunkt der Aufsprungbahn an der Stelle x\_0.

Somit muss f''(x\_0) =0 gelten. Daher ist auch f'(x\_0) ein Extremum.

Da die Steigung der Kurve an der Stelle x\_0 durch f'(x\_0) berechnet wird, ist hier auch die Steigung maximal.

---

c.)

Wahr sind die Aussagen B, C, D, F, und G.

-----

+++2.038

a.)

f(x) >0 ... A, G;

Für die Punkte A und G ist der Funktionswert positiv.

f'(x) <0 ... C, G;

In den Punkten C und G ist die Steigung positiv.

Nur im Punkt G ist sowohl der Funktionswert als auch die Steigung positiv.

-----

b.)

E

---

c.)

A, G

---

d.)

C, E

---

e.)

B, F

---

f.)

D

---

g.)

G

---

h.)

E

-----

+++2.039

a.)

f(x) >0 (Punkt liegt oberhalb der x-Achse) gilt für die Punkte B, C und G.

Alle anderen Punkte kommen nicht mehr in Frage.

f'(x) >0 (f steigend) gilt nur für G.

f''(x) >0 (positive Krümmung) gilt für G --> G ist der gesuchte Punkt.

---

b.)

f(x) <0 gilt für die Punkte B, C und G.

Alle anderen Punkte kommen nicht mehr in Frage.

f'(x) >0 gilt nur für C.

f''(x) >0 gilt für C --> C ist der gesuchte Punkt.

---

c.)

E

---

d.)

A

---

e.)

F

---

f.)

B

---

g.)

D

-----

+++2.040

a.)

Der Radfahrer fährt in den ersten 10 Minuten am schnellsten, da die Gerade in diesem Bereich am stärksten steigt.

---

b.)

[0; 10] 30 km/h

[10; 40] 20 km/h

[40; 50] 0 km/h

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

v =15)/(40) (km)/(min) =(15)/(40) \*60 (km)/h =22,5 (km)/h

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.041

a.)

aus 7 m Höhe

---

b.)

Die Geschwindigkeit beträgt -5 m/s.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Die Geschwindigkeit beträgt (-3)/(0,03) =-10 m/s

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

Der Zeitpunkt t\_0 des Aufpralls wird durch Lösen der Gleichung h(t) =0 berechnet.

Die Geschwindigkeit wird durch die erste Ableitung von h beschrieben.

Durch Einsetzen von t\_0 in ('dh(t))/('dt) erhält man die gesuchte Geschwindigkeit.

-----

j-261

+++2.042

a.)

10 m/s

---

b.)

7,5 m/s

---

c.)

15 m/s

---

d.)

richtig:

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.043

11,25 m

-----

+++2.044

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Die mittlere Geschwindigkeit in der zweiten Sekunde beträgt -15 m/s.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Der Stein befindet sich nach ca. 32,8 Sekunden 10 m über dem Boden.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Seine Momentangeschwindigkeit beträgt ca. -28 m/s.

---

d.)

v(t) =(ds(t))/('dt) =-10 \*t

Zeitpunkt des Aufpralls: nach 3,16 Sekunden

Aufprallgeschwindigkeit: -31,6 m/s

---

e.)

Die Beschleunigung gibt die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit an.

Sie entspricht der Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion.

Das negative Vorzeichen der Beschleunigung ergibt sich in diesem Beispiel aus der Bewegungsrichtung des Steins. Es ist nicht mit der physikalischen Bedeutung einer Verzögerung zu verwechseln.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.045

a.)

ca. 57 km/h

---

b.)

ca. 57 km/h

---

c.)

125 m

-----

+++2.046

a.)

h(t) =h\_0 +\_0 \*t -g/2 \*t^2

v(t) =('dh(t))/('dt) =v\_0 -g \*t =0

t =(v\_0)/g

---

b.)

Der Zeitpunkt ist unabhängig von der Abwurfhöhe, da h\_0 in der Formel zur Berechnung von t nicht vorkommt.

-----

+++2.047

a.)

12 m

---

b.)

Durch Koeffizientenvergleich aus der Gleichung ist ersichtlich oder: v(t) =('dh(t))/('dt) =15 -10 \*t und v(0) =15 m/s

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

An der höchsten Stelle der Bahn verläuft die Tangente an die Kurve parallel zur t-Achse.

Ihre Steigung ist gleich null.

Die Steigung der Tangente entspricht der Momentangeschwindigkeit an dieser Stelle.

---

d.)

v(t) =('dh(t))/('dt) =15 -10 \*5

Aufprallzeitpunkt: h(t) =0, also nach t ~~3,66 s

v(3,66) =-21,6 m/s

-----

j-262

+++2.048

s =v \*t =130 :3,6 \*2 =72,22; ungefähr 72 m

-----

+++2.049

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

v\_0 =15 m/s;

t\_1 =1 s;

t\_2 ~~2,5 s und

a ~~-6 m/(s^2)

---

b.)

ca. 34 m

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.050

a.)

c. 533 m

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt in den ersten 20 Sekunden zu, erreicht dort ihr Maximum (Wendestelle des Weg-Zeit-Diagramms) und nimmt wieder ab.

Nach 40 Sekunden steht das Auto still.

---

d.)

v(t) =('ds(t))/('dt) =2 \*t -(t^2)/(20)

maximale Geschwindigkeit 20 m/s =72 km/h nach 20 Sekunden

---

e.)

54 km/h =15 m/s

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

f.)

Durchschnittsgeschwindigkeit ist (s(30) -s(10))/(20) =(450 -83,3^-)/(20) =0 m/(s^2).

Durchschnittsbeschleunigung ist (v(30) -v(10))/(20) =0 m/(s^2).

---

g.)

a(t) =('dv(t))/('dt) =2 -t/(10)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++2.051

a.)

B, C, D, A

---

b.)

D, B, A, C

-----

j-263

+++Z 2.1

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

Gleichung: a +b +c +d =10

Verwendete Information: (II)

Zusammenhang: E(1) =10

---

Gleichung: 300 \*a +20 \*b +c =0

Verwendete Information: (V)

Zusammenhang: ('dE)/('dt)|\_[t =10] =0

---

Gleichung: 1000a +100b +10c +d =80

Verwendete Information: (III)

Zusammenhang: E(10) =80

---

Gleichung: d =1

Verwendete Information: (I)

Zusammenhang: E(0) =1

---

b.)

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

E(t) =-(601)/(8100) \*t^3 +(5621)/(8100) \*t^2 +(3394)/(405 \*t +1

---

c.)

(E(10) -E(0))/(10 -0) =(80 -1)/(10) =7,9

Innerhalb der ersten 10 Wochen nimmt die Anzahl der Erkrankten durchschnittlich um 7900 Personen pro Woche zu.

---

d.)

richtig ist B

---

e.)

richtig ist A

-----

+++Z 2.2

Damit das gekrümmte Rohr im Anschlusspunkt A ohne Knick in das gerade Rohr 1 übergeht, muss f(-2) =2 und f '(-2) =1 sein.

-----

+++Z 2.3

{{Tabelle aufgelöst}}

Gleichung: d =0

Verwendete Information: (I)

Zusammenhang: f(0) =0

---

Gleichung: 64000 \*a +1600 \*b +40 \*c +d =-1

Verwendete Information: (V)

Zusammenhang: f(40) =-1

---

Gleichung: 4800 \*a +80 \*b +c =0

Verwendete Information: (IV)

Zusammenhang: f'(40) =0

---

Gleichung: c =0

Verwendete Information: (II)

Zusammenhang: f'(0) =0

---

b.)

f(x) =(x^3)/(3200) -(3 \*x^2)/(1600)

-----

+++Z 2.4

a.)

g(x) =x +4

---

b.)

D(0|3): f(0) =3; e =3

Extremum: f'(0) =0; d =0

C(3|0): f(3) =0; 81 \*a +27 \*b +9 \*c +3 =0; also 81 \*a +27 \*b +9 \*c =-3

f(-2,3) =g(-2,3) =1,7

27,9841 \*a +12,167 \*b +5,29 \*c +3 =1,7; also 27,9841 \*a +12,167 \*b +5,29 \*c =-1,3

f'(-2,3) =g'( -2,3) =1

-48,668 \*a +15,87 \*b -4,6 \*c +3 =1; also -48,668 \*a +1587 \*b -4,6 \*c =-2

---

c.)

f(x) =0,001534 \*x^4 -0,0176 \*x^3 -0,294342 \*x^2 +3

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++Z 2.5

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =0 eine Extremstelle.

Graph A: X

Graph B:

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =0 einen Wendepunkt.

Graph A:

Graph B: X

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist im Intervall [-2; -1] streng monoton wachsend.

Graph A: X

Graph B: X

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f hat an der Stelle x =1 einen Wendepunkt.

Graph A: X

Graph B:

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist für alle x 'el 'R streng monoton wachsend.

Graph A:

Graph B: X

---

Aussage bezüglich der Funktion f: Die Funktion f ist im Intervall [-2; 1] rechtsgekrümmt. (d. h. im gegebenen Intervall gilt: f''(x) <0)

Graph A: X

Graph B:

-----

j-264

+++Z 2.6

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

e.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++Z 2.7

a.)

Die momentane Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente an die Funktion s.

Da die eingezeichneten Tangenten ungefähr parallel verlaufen, ist die momentane Geschwindigkeit zu den genannten Zeitpunkten ungefähr gleich hoch.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

(200)/(20);

v =10 m/s =36 (km)/h

---

c.)

(750)/(60) =12,5;

v^- =12,5 m/s =45 (km)/h

---

d.)

s(22) ~~232 m

---

e.)

v(t) =21 -0,95 \*t;

v(0) =21 m/s =75,6 (km)/h

---

f.)

Die Beschleunigung-Zeit-Funktion a ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v.

v ist eine lineare Funktion, a ist konstant und gleich der Steigung von v, also -0,95 m/(s^2).

-----

j-265

## !!3 Weitere Ableitungsregeln und Anwendungen

+++3.001

a.)

f\*(x) =-4/(x^3)

---

b.)

f'(x) =2/('w(2))

---

c.)

f'(x) =1/(4 \*'w(x))

---

d.)

f'(x) =1/(3\*'w[3](x^2))

---

e.)

f'(x) =-(24)/(x^3)

---

f.)

f'(x) =-3 \*x^(-4)

---

g.)

-8 \*x^(-3)

-----

+++3.002

a.)

f'(x) =('w(2))/(2 \*'w(x))

f'(2) =0,5

---

b.)

f'(x) =('w(3))/(2 \*'w(2x))

f'(2) =('w(3))/4

---

c.)

f'(x) =-('w(2))/(2x \*'w(x))

f'(2) =-0,25

---

d.)

f'(x) =-('w(2))/(x^2)

f'(2) =-('w(2))/(4)

---

e.)

f'(x) =-3/(2x \*'w(x)

f'(2) =-3/(4 \*'w(2))

---

f.)

f'(x) =(3 \*'w(5x))/2

f'(2) =(3 \*'w(10))/2

---

g.)

f'(x) =2/(3 \*'w[3](2))

f'(2) =2/(3 \*'w[3](2))

---

h.)

f'(x) =-5/(3x \*'w[3](2))

f'(2) =-5/(6 \*'w[3](2))

-----

+++3.003

a.)

f'(x) =2 \*'e^x

---

b.)

f'(x) =('e^x)/('w(2'pi))

---

c.)

f'(x) =1/(x \*'ln(2))

---

d.)

f'(x) =2/x

---

e.)

f'(x) =='w(2) \*'cos(x)

---

f.)

-('sin(x)/(4

---

g.)

f'(x) =-3/4 \*'sin(x)

---

h.)

f'(x) =2/('cos^2(x))

-----

+++3.005

a.)

g'(y) =1 -1/(2 \*'w(y))

---

b.)

C'(a) =4 \*a^(-0,2)

---

c.)

k'(x) =0,1 -(50)/(x^2)

---

d.)

p'(z) =4/(z^3)

-----

+++3.006

a.)

f'(x) =-1/(x^2) -2/(x^3)

f'(2) =-0,5

---

b.)

f'(x) =-1/('w(x)

f'(4) =-0,5

---

c.)

f'(x) =1/2 +4/(x^2)

f'(-2) =1,5

---

d.)

f'(x) =1/(8 \*'w(2)) +1/('w(x^3))

f'(1) =9/8

-----

+++3.007

a.)

f'(x) =3 \*'e^x

---

b.)

f'(x) =1/(2x)

---

c.)

f'(x) =1/4 \*'e^x

---

d.)

f'(x) =2/x

---

e.)

f'(x) =2 \*'cos(x) -2 \*'sin(x)

---

f.)

f'(x) ='cos(x)

---

g.)

f'(x) =('cos(x))/4 +1/4

---

h.)

f'(x) =3/('cos^2(x))

-----

+++3.008

a.)

f'(x) =12 \*x -5

---

b.)

f'(x) =18 \*x^2 -8 \*x -3

---

c.)

f'(x) =4 \*x^3 -6 \*x^2 +6 \*x -6

---

d.)

f'(x) =4 \*x^3

-----

+++3.009

a.)

f'(x) ='e^x \*(3 +3 \*x)

---

b.)

f'(x) ='e^x(2 \*x +x^2)

---

c.)

f'(x) ='e^x \*(x^2 +2 \*x -4)

---

d.)

f'(x) =4 \*x \*'ln(x) +2 \*x

---

e.)

f'(x) ='sin(x) +x \*'cos(x)

---

f.)

f'(x) =2 \*x \*'cos(x) -x^2 \*'sin(x)

---

g.)

f'(x) =2 \*'tan(x) +(2 \*x)/('cos^2(x))

---

h.)

f'(x) ='e^x \*('sin(x) +'cos(x))

-----

+++3.010

a.)

f'(x) =-5/(x^2)

---

b.)

f'(x) =-3/((x +2)^2)

---

c.)

f'(x) =(-1)/((3x -2)^2)

---

d.)

f'(x) =-7/(3x^2)

---

e.)

f'(x) =1/((x +3)^2)

---

f.)

f'(x) =(13)/((-5x +1)^2)

---

g.)

f'(x) =(-4x^2 +24)/((x^2 +5x +6)^2)

---

h.)

f'(x) =(-10 \*(x^2 +1))/((2x -1)^2 \*(x +2)^2)

-----

+++3.011

a.)

-9/16

---

b.)

3/16

---

c.)

-10/9

---

d.)

-5/27

-----

+++3.012

a.)

f'(x) =(-2x)/((x^2 -1)^2)

---

b.)

f'(x) =-(x^2 +1)/((x^2 -1)^2)

---

c.)

f'(x) =(-4y)/((x^2 -1)^2)

---

d.)

f'(x) =(3x^2 \*(x^2 -3)/((x^2 -1)^2)

---

e.)

f'(x) =(-2)/((1 +x)^2)

---

f.)

f'(x) =(-4x)/((2 +x^2)^2)

---

g.)

y' =(-6x^2)/((1 +x^3)^2)

---

h.)

y' =(-8x^3)/((1 +x^4)^2)

-----

+++3.013

a.)

f'(x) =8 \*(4 \*x -1)

---

b.)

f'(x) =-6 \*(4 -3 \*x)

---

c.)

f'(x) =40 \*(4 \*x +2)

---

d.)

f'(x) =15 \*(3 \*x^2 -4 \*x +6)^2 \*(6 \*x -4)

---

e.)

f'(x) =15 \*(5 \*x)^2

---

f.)

f'(x) =-140 \*(-5 \*x +2)^3

---

g.)

f'(x) =5 \*(x -3)^4

---

h.)

f'(x) =8 \*x \*(-x^2 +1)

-----

+++3.014

a.)

f'(x) =2/('w(4x -1))

---

b.)

f'(x) =(-x)/('w(1 -x^2))

---

c.)

f'(x) =4/(3 \*'w[3]((4x -1)^2))

---

d.)

f'(x) =8/(3 \*'w[3]((4x -1)^2))

---

e.)

f'(x) =x/('w(x^2) -4)

---

f.)

f'(x) =3x \*'w(x^2 -4)

---

g.)

f'(x) =(4x)/(3 \*'w[3](x^2 -4))

---

h.)

f'(x) =(8x)/3 \*'w[3](x^2 -4)

-----

+++3.015

a.)

f'(x) =('w(3))/(2 \*'w(x))

---

b.)

f'(x) =2x -8/(x^3)

---

c.)

f'(x) =3/2 \*'w(x)

---

d.)

f'(x) =1 -3/('w(x))

---

e.)

f'(x) =(-5)/(x^2)

---

f.)

f'(x) =/(4 \*'w(x))

---

g.)

f'(x) =5/2 \*'w(x^3)

---

h.)

f'(x) =(-2x)/((x^2 -1)^2)

-----

+++3.016

a.)

65/54

---

b.)

1 -'w(2)

---

c.)

0,15

---

d.)

2/3

-----

+++3.017

a.)

f'(x) =-4 \*(1 -x)/((1 +x)^3)

---

b.)

f'(x) =(2x^2 +1)/('w(1 +x^2))

---

c.)

f'(x) =(x -6)/((2x +1)^2 \*'(x^2 +3))

---

d.)

f'(x) ='w((2x -3)/(2x +3)) \*(-6)/((2x -3)^2)

---

e.)

f'(x) =(3x +1)/('w(2x +3))

---

f.)

f'(x) =(4 \*(x^2 -1) \*(x^2 +x +1))/((2x +1)^3)

---

g.)

f'(x) =(9x^2)/((x +3)^4)

-----

+++3.018

a.)

f'(x) =(2x^3 \*(x +8)/((x +4)^2)

f'(2) =(20)/(27)

---

b.)

f'(x) =(2 x^2 +1)/(4 \*'w(x^2 +1))

f'(1) =(3 \*'w(2))/8

---

c.)

f'(x) =(-8x)/((x^2 +1)^2

f'(2) =-(16)/(25)

-----

+++3.019

a.)

f'(x) =2 \*'e^(2x)

---

b.)

f'(x) =-2 \*'e^(-x)

---

c.)

f'(x) =1/4 \*'e^(-x/2)

---

d.)

f'(x) =-x \*'e^(-(x^2)/2)

---

e.)

f'(x) =(1-x) \*'e^(-x)

---

f.)

f'(x) =(2 -x) \*'e^(-x/2)

---

g.)

f'(x) =(2x -(x^2)/2) \*'e^(-x/2)

---

h.)

f'(x) =(4 -4x^2) \*'e^(-(x^2)/2)

-----

+++3.020

a.)

f'(x) =3 \*'e^x

f''(x) =3 \*'e^x

---

b.)

f'(x) ='e^x

f''(x) ='e^x

---

c.)

f'(x) =3 \*'e^(3x)

f''(x) =9 \*'e^(3x)

---

d.)

f'(x) =3 +3 \*'e^(3x)

f''(x) =9 \*'e^(3x)

---

e.)

f'(x) =e^(3 +x)

f''(x) ='e^(3 +x)

---

f.)

f'(x) =6x \*(1 +'e^(3x^2))

f''(x) =6 \*(1 +'e^(3x^2) +6x^2 \*'e^(3x^2))

---

g.)

f'(x) =6 \*'e^(2x)

f''(x) =12 \*'e^(2x)

---

h.)

f'(x) =f''(x) =5 \*'e^(x +2)

-----

j-266

+++3.021

a.)

f'(x) =2/(2x -1)

---

b.)

f'8x) =2/x

---

c.)

4/(2x -1)

---

d.)

f'(x) =-1/x

---

e.)

f'(x) =(2 \*'ln(x))/x

---

f.)

f'(x) =(-1)/(x \*('ln(x))^2)

---

g.)

f'(x) =2x \*'ln(x) +x

---

h.)

f'(x) =(1 -'ln(x))/(x^2)

-----

+++3.022

a.)

f'(x) =2 \*'cos(2 \*x)

f''(x) =-4 \*'sin(2 \*x)

---

b.)

f'(x) =-2 \*'sin(2 \*x -1)

f''(x) =-4 \*'cos(2 \*x -1)

---

c.)

f'(x) ='sin(x) +x \*'cos(x)

f''(x) =2 \*'cos(x) -x \*'sin(x)

---

d.)

f'(x) =2 \*x \*'cos(x) -x^2 \*'sin(x)

f''(x) =2 \*'cos(x) -4 \*x \*'sin(x) -x^2 \*'cos(x)

---

e.)

f'(x) =2 \*('cos^2(x) -'sin^2(x))

f''(x) =-8 \*'sin(x) \*'cos(x)

---

f.)

f'(x) =-2 \*'sin(x) -2 \*'sin(x) \*'cos(x)

f''(x) =-2 \*'cos(x) -2 \*('cos^2(x) -'sin^2(x))

---

g.)

f'(x) =2/('cos^2(2 \*x))

f''(x) =(8 \*'sin(2 \*x))/('cos(2 \*x))

---

h.)

f'(x) =1/(2 \*'cos^2(x))

f''(x) =('sin(x))/('cos^3(x))

-----

+++3.023

a.)

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

b.)

An der Nullstelle der ersten Ableitung besitzt die Funktion f einen Extremwert.

Bei den Extremstellen der ersten Ableitung liegen die beiden Wendepunkte der Funktion f.

---

c.)

f(x) =-x \*'e^(-(x^2)/2)

f''(x) =-'e^(-(x^2)/2) +x^2 \*'e^(-(x^2)/2) ='e^(-(x^2)/2) \*(x^2 -1)

-----

+++3.024

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

40 min;

7,4 ('my g)/(Liter)

---

c.)

80 min;

-4,1 ('my g)/(Liter) pro h

-----

+++3.025

a.)

a =40;

k =-1

---

b.)

nach 2 h;

-5,4 (mg)/(Liter) pro h

---

c.)

Wendestelle des Funktionsgraphen

-----

+++3.026

a.)

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

b.)

0,13 m

---

c.)

Beim Wachstum der Sonnenblume liegt logistisches Wachstum vor.

Der Sättigungswert beträgt 2,6 Meter, der nicht überschritten werden kann.

Da für großes t der Wert 'e^(-0,59 \*t) gegen null geht, nähert sich der Nenner dem Wert 1 und h(t) dem Wert 2,6.

---

d.)

nach ca. 5 Wochen;

1,3 m;

0,38 m/Woche

---

e.)

nach ca. 8,7 Wochen;

0,14 m/Woche

-----

j-267

+++3.027

a.)

K'(t) ='e^(-'al \*t) -'e(-'be \*t))

K'(t) =A \*'e^(-'al \*t) -'e(-'be \*t))

X K'(t) =A \*('be \*e^(-'be \*t) -'e('al \*'e^('al \*t))

X K'(t) =A \*('e^(-'al \*t) \*(-'al) -'e(-'be \*t) \*(-'be))

---

b.)

K'(t) ='e^('al \*t) -'e^('be \*t) ist falsch, weil laut Faktorregel der konstante Faktor beim Differenzieren erhalten bleibt und die inneren Ableitungen fehlen.

K'(t) =A \*('e^('al \*t) -'e^('be \*t)) ist falsch, weil jeweils die innere Ableitung bei beiden Summanden fehlt.

-----

+++3.028

a.)

Die Summe oder Differenz von Potenzen kann nicht mehr vereinfacht werden: 'e^a -'e^b \='e^(a -b)

---

b.)

K'(t) =3 \*(-0,2 \*'e^(-0,2 \*t) +0,4 \*'e^(-0,4 \*t))

K''(t) =3 \*(0,22 \*'e^(-0,2 \*t) -0,42 \*'e^(-0,4 \*t))

-----

+++3.029

a.)

f(t) =15 \*('e^(-0,2 \*t) -'e^(-0,6 \*t))

---

b.)

4,05 mg;

1,99 mg;

0,12 mg;

0,01 mg

---

c.)

nach 2 3/4 Stunden mit 5,77 mg

---

d.)

nach ca. 5,5 Stunden mit -2/3 (mg)/h

---

e.)

zwischen ca. 17 Minuten und 11,5 Stunden nach der Einnahme

---

f.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++3.030

a.)

nach 2,4 Stunden mit ca. 70 mg

---

b.)

nach ca. 4,8 Stunden mit -7,3 (mg)/(Liter) pro h

---

c.)

nach ca. 16,6 Stunden

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++3.031

a.)

[0,1 h; 3,7 h]

---

b.)

1 h;

8,2 (pg)/(Liter)

---

c.)

2 h;

-3 (pg)/(Liter) pro h

---

d.)

Gesucht ist jene Stelle mit der größten Abnahme.

Die erste Ableitung der Funktion hat dort ihr Minimum. Dieses Minimum erhält man, indem man die zweite Ableitung gleich null setzt. Die Lösung dieser Gleichung ist der gesuchte Zeitpunkt.

-----

+++3.032

a.)

Die Länge zum Zeitpunkt t =0 beträgt ca. 0,5 cm, die Sättigungsmenge liegt bei 21 cm.

---

b.)

Nach 8,3 Wochen ist das Längenwachstum am größten.

Die Zuckerrübe ist zu diesem Zeitpunkt 10,5 cm lang.

---

c.)

Logistisches Wachstum hat zu Beginn einen progressiven Verlauf und geht an der Stelle ihres größten Wachstums in einen degressiven Verlauf über. An dieser Stelle liegt der Wendepunkt.

---

d.)

('dL)/('dt)(8,3) =2,35 gibt die Steigung der Funktion L an der Wendestelle t =8,3 an.

An dieser Stelle hat die Funktion L ihre größte Steigung mit ca. 2,35 cm/Woche.

-----

j-268

## !!4 Optimierung und Regressionsrechnung

+++4.001

a, b Rechteckseiten in Meter

a.)

Flächeninhalt A =a \*b

Nebenbedingung: 2 \*(a +b) =40

Zielfunktion: A(b) =(20 -b) \*b bzw. A(a) =(20 -a) \*a

---

b.)

Definitionsbereich: [0; 20]

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Seitenlänge: 10 m;

Max. Flächeninhalt: 100 m^2

---

d.)

Die Seiten des Rechtecks sind jeweils 10 m lang.

-----

+++4.002

a.)

x =20;

y =20

---

b.)

400

-----

+++4.003

y =5 m;

x =10 m;

A\_(max) =50 m^2

-----

+++4.005

a.)

5 m;

10 m

---

b.)

7,5 m;

7,5 m

-----

+++4.006

a.)

a Länge der an das Nachbargrundstück grenzenden Seite in Metern

b Länge der zweiten Rechteckseite in Metern

K(b) Kosten in Euro für eine Seitenlänge von b Metern

K(b) =((50)/b +2 \*b) \*8

analog:

K(a) =(a +2 \*(50)/a) \*8

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

c.)

Die Länge der an das Nachbargrundstück grenzenden Seite sollte 10 m, die andere Seite 5 m betragen.

-----

+++4.006

a.)

K(x) =1800 \*x +(180000)/x;

mit x in Metern und K(x) in Euro

---

b.)

y =10 m;

x =15 m;

Kosten: 36000,00 €

---

c.)

Der Preis pro Meter wurde für die Glasfront und für die Mauer jeweils um 10 %, also um denselben Faktor erhöht. Da für die Berechnung der Abmessungen aber nur deren Kostenverhältnis eine Rolle spielt, ändert sich an den ursprünglich berechneten Abmessungen nichts.

-----

+++4.007

a.)

10 m;

15 m;

150 m^2

---

b.)

8 m;

12 m;

57600,00 €

-----

+++4.008

a.)

M(y) =(y +20) \*10 +2 \*(2500)/y \*10

---

b.)

x =35 cm;

y ~~70 cm

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

j-269

+++4.009

a.)

Kante b -2 \*x =y und 1/2 \*(a -2 \*x) =z

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

---

b.)

Da 2 \*x +y =b und b =21 cm ist, muss x in jedem Fall kleiner als 10,5 cm sein.

Der Definitionsbereich ist daher maximal [0; 10,5].

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Das maximale Volumen beträgt ca. 550 cm3. Die Kantenlänge x beträgt in diesem Fall ca. 4 cm.

---

d.)

y ~~13 cm und

z ~~10,9 cm

---

+++4.010

a.)

29,7 =2 \*f +2 \*y +h, wobei laut Formel h =27,7 -2 \*y

Damit ist f =1 cm.

---

b.)

Nebenbedingung: 2 \*x +2 \*y +2 =21

V =(9,5 -y) \*y \*(27,7 -2 \*y)

---

c.)

x =5,8 cm;

V =435,6 cm^3

---

d.)

y =3,7 cm;

h =20,3 cm

-----

+++4.011

b ='w[3](1/2) dm ~~7,94 cm;

O ~~757 cm^2;

h ~~15,9 cm

-----

+++4.012

r =h ='w[3]((100)/('pi)) dm ~~3,2 dm

-----

+++4.013

r ~~4,6 cm;

h ~~15,2 cm

-----

+++4.014

a.)

{{Grafik: Skizze nicht übertragen}}

---

b.)

10 =r \*'pi +2 \*b +2 \*r

---

c.)

A(r) =10 \*r -2 \*r^2 -(r^2 \*'pi)/2

---

d.)

r ~~1,4 m;

A ~~7 m^2

---

e.)

Die Seiten sind ca. 1,4 m und ca. 2,8 m lang.

---

+++4.015

a.)

200 =r^2 \*'pi \*h -(2 \*r^3 \*'pi)/3

---

b.)

O =2 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*h

Aus der Nebenbedingung erhält man: h =(200)/(r^2 \*'pi) +(2 \*r)/3

O(r) =2 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*((200)/(r^2 \*'pi) +(2 \*r)/3) =2 \*r^2 \*'pi +(400)/r +(4 \*r^2 \*'pi)/3 =(10 \*r^2 \*'pi)/3 +(400)/r

---

c.)

Da das Volumen in dm3 eingesetzt wurde, muss r in dm angegeben werden. Für die Oberfläche ergibt sich die Einheit dm^2.

---

d.)

Radius r ~~2,67 dm;

O ~~224,5 dm^2

---

e.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

f.)

Höhe h~~10,71 dm

-----

j-270

+++4.016

a.)

2 =r^2 \*'pi \*h +(2 \*r^3 \*'pi)/3

---

b.)

O =3 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*h

Aus der Nebenbedingung erhält man: h =2/(r^2 \*'pi) -(2 \*r)/3

O(r) =3 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*(2/(r^2 \*'pi) -(2 \*r)/3) =3 \*r^2 \*'pi +4/r -(4 \*r^2 \*'pi)/3 =(5 \*r^2 \*'pi)/3 +4/r

---

c.)

Radius r ~~7,26 cm;

O ~~826,94 cm^2

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

e.)

Höhe h ~~7,26 cm

-----

+++4.017

a.)

500 =r^2 \*'pi \*h

---

b.)

K =5 \*4 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*h

Aus der Nebenbedingung erhält man: h =(500)/(r^2 \*'pi)

K(r) =20 \*r^2 \*'pi +2 \*r \*'pi \*(500)/(r^2 \*'pi) =20 \*r^2 \*'pi +(1000)/r

---

c.)

r =2 cm;

h =3,993 dm

-----

+++4.018

a), b) und c)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Gleichung der gezeichneten Regressionsgerade lautet:

K(x) =0,8 \*x +70

---

d.)

K(x) =0,9 \*x +66

---

e.)

Die Fixkosten der Produktion betragen 66 GE.

Wird die Produktionsmenge um 1 ME erhöht, erhöhen sich die Kosten um 0,9 GE.

---

f.)

K(45) =106,5 GE

-----

+++4.019

a.)

U(x) =0,306 \*x -3,316

---

b.)

r =0,97

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

U(45) ~~10,5 Mio €

---

e.)

Die Regression nähert die Daten sehr gut an. Das Modell ist daher zur Beschreibung der Abhängigkeit des Jahresumsatzes von den Werbungskosten geeignet.

-----

j-271

+++4.020

a.)

linear: y =-30,27 \*x +193

r^2 =0,71

quadratisch: y =7,81 \*x^2 -92,74 \*x +266

r^2 =0,948

exponentiell: y =274 \*0,569x

r^2 =0,997

---

b.)

Für das exponentielle Modell liegt r^2 sehr nahe bei 1. Es ist das beste Modell.

---

c.)

individuelle Lösung

-----

+++4.021

{{Tabelle aufgelöst}}

Monate: 0

Anzahl: 1

---

Monate: 1

Anzahl: 1

---

Monate: 2

Anzahl: 2

---

Monate: 3

Anzahl: 3

---

Monate: 4

Anzahl: 5

---

Monate: 5

Anzahl: 8

---

Monate: 6

Anzahl: 13

---

Monate: 7

Anzahl: 21

---

Monate: 8

Anzahl: 34

---

Monate: 9

Anzahl: 55

---

Monate: 10

Anzahl: 89

---

Monate: 11

Anzahl: 144

---

Monate: 12

Anzahl: 233

---

b.)

377

---

c.)

f(t) =0,7677 \*'e^(0,474 \*t)

---

+++4.022

a.)

T(v) =0,001 \*v^3 +1,5

---

b.)

Da zur Berechnung 4 Datenpaare vorliegen, liegen alle Datenpaare am Graphen der Funktion. Das Bestimmtheitsmaß ist gleich 1.

-----

+++Z 4.1

a.)

a Länge der an den Stall grenzenden Seite in Metern

b Länge der anderen Seite, b =(60)/a

K(a) =(a \*2 \*(60)/a) \*7

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Weide sollte über eine Länge von ca. 11 m entlang der Stallmauer verlaufen.

---

c.)

K'(a) =7 -(840)/(a^2) =0

a ='w(120) ~~11

---

d.)

b =(60)/a ~~5,5

Die Länge der zweiten Zaunseite beträgt ca. 5,5 m.

Die anfallenden Kosten betragen K(11) =153,36 €

-----

+++Z 4.2

a) und b)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

Die Abstände der Datenpunkte von der Gerade sollten möglichst gering sein.

---

d.)

K(x) =16 \*x +180

---

e.)

Die Steigung der Gerade ist 16, d. h., pro zusätzlich produzierter ME steigen die Kosten um 16 GE. Die Fixkosten betragen 180 GE.

---

f.)

Mit GeoGebra: y =15,75 \*x +182,5

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

g.)

Der Korrelationskoeffizient beträgt 0,99. Dies deutet auf eine sehr gute positive Korrelation hin.

---

h.)

Zur Definition einer Polynomfunktion dritten Grades sind mindestens 4 Datenpunkte nötig. Die berechnete Funktion verläuft in diesem Fall durch alle 4 Punkte.

-----

j-272

+++Z 4.3

a.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

U(x) =-0,0135 \*x^2 +2,87 \*x -21,55

---

b.)

Bestimmtheitsmaß: 0,997 sehr hohe Korrelation

---

c.)

U(300) =-60,55 GE

---

d.)

Die Regressionsfunktion gibt nur im Bereich der vorhandenen Daten, also für 45 GE <x <112 GE zuverlässige Auskunft. Für eine Abschätzung des Umsatzes bei 300 GE Werbeausgaben ist die Regressionsfunktion nicht passend.

-----

## !!5 Kosten- und Preistheorie

+++5.001

a.)

fallend, daher Nachfrage;

p\_h =3 GE/ME,

x\_S =12 ME

---

b.)

steigend, daher Angebot

---

c.)

fallend, daher Nachfrage;

p\_h =30 GE/ME,

x\_S =50 ME

---

d.)

fallend, daher Nachfrage;

p\_h =12 GE/ME,

x\_S =20 ME

-----

+++5.002

a.)

Nachfragemengen können nicht negativ sein, deshalb gilt x >=0.

Die Sättigungsmenge beträgt 40 ME, für x >40 wäre der Preis negativ.

---

b.)

Nachfragemengen können nicht negativ sein, deshalb gilt x >=0.

Die Preisfunktion hat die Nullstellen x\_1 =20 und x\_2 =30.

Die Sättigungsmenge beträgt 20 ME, für x >20 wäre der Preis negativ.

-----

+++5.003

a.)

p\_A(x) =1/3 \*x +5/3

---

b.)

p\_A(x) =1/2 \*x^2 +1/4 \*x +1

-----

j-273

+++5.004

a.)

p\_N(x) =-0,5 \*x +100

---

b.)

p\_N(x) =-0,1 \*x^2 -x +5

-----

+++5.005

a.)

p\_N(x) =-1,5 \*x +12

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

p\_G =6 GE/ME

---

d.)

-1,5 \*x +12 =1 +2,5 \*x \*'w(x);

p\_G =p\_N(4) =6

-----

+++5.006

a.)

11,6 GE/ME

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

7 GE/ME

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

c.)

4,54 GE

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

4,5 GE/ME

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++5.007

a.)

p\_N(x) =0,1 \*x^2 -7 \*x +120

---

b.)

p\_A(x) =1,7 \*x +30

---

c.)

50,4 GE/ME

-----

+++5.008

a.)

10 €/(m^2)

---

b.)

10000 Wohnungen

---

c.)

p\_N(x) =16 -0,4 \*x;

p\_A(x) =4 +0,4 \*x

---

d.)

10 €/(m^2);

10000 Wohnungen

-----

+++5.009

a.)

0,40 €/Liter

---

b.)

ca. 120000 Liter

---

c.)

p\_N(x) =0,8 -0,002 \*x;

p\_A(x) =0,1 +0,0015 \*x

---

d.)

0,40 €/Liter;

116667 Liter

-----

5.010

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

1,8 €/Liter;

15 Mio. Liter

---

c.)

x\_G =5 Mio. Liter;

p\_G =1,2 €/Liter

---

d.)

2,71 Mio. Liter Nachfrageüberhang

-----

+++5.011

a.)

E(x) =100 \*x -0,5 \*x^2;

5000 GE (x\_E =100 ME)

---

b.)

E(x) =-0,1 \*x^3 -x^2 +5 \*x;

5,21 GE (x\_E =1,94 ME)

---

c.)

E(x) =15 \*x \*(2 -0,1 \*x)^2;

177,78 GE (x\_E =6,67 ME)

---

d.)

E(x) =(1000 \*x)/(x +20) -8 \*x;

360 GE (x\_E =30 ME)

-----

j-274

+++5.012

a.)

('De p)/p =(0,02)/(0,2) =0,1; d. h. +10 %

('De x)/x =-(100000)/(1900000) =-0,05; d. h. -5 %

'ep =(-5 %)/(10 %) =-0,5; unelastisch

---

b.)

Die Preiserhöhung führt zu einer Erlössteigerung:

E(2000000) =2000000 \*0,2 =400000

E(1900000) =1900000 \*0,22 =418000, d. h., der Erlös ist um 4,5 % gestiegen.

-----

+++5.013

a.)

('De p)/p =(-1)/(15) ~~-0,067; d. h.-6,7%

('De x)/x =-(50)/(1000) =0,05; d. h. +5 %

'ep =(5 %)/(-6,7 %) =-0,75; unelastisch

---

b.)

Die Preissenkung führt zu einer Erlösabnahme:

E(1000) =1000 \*15 =15000

E(1050) =1050 \*14 =14700, d. h., der Erlös ist um 2 % gesunken.

-----

+++5.014

Getreide: unelastisch

Lacoste-T-Shirt: elastisch

Fahrkarte Wiener Linien: unelastisch

Zigaretten für süchtige Raucher: unelastisch

VW Polo: elastisch

Butter: unelastisch

Konzertkarten: elastisch

Mode-Artikel und ersetzbare Güter haben eine elastische Nachfrage.

Lebensnotwendige Güter haben eine unelastische Nachfrage.

-----

+++5.015

a.)

Eine Preisänderung um 1 % bewirkt eine Absatzänderung um 3,5 %.

---

b.)

Billige Autos wie ein Ford Focus werden von Kunden bei geringen Preisänderungen durch andere Marken ersetzt.

Bei teureren Autos sind Kunden markentreuer.

-----

+++5.016

a.)

('De p)/p =(-0,5)/3 ~~-0,167, d- h. -16,7 %

('De x)/x =-(500)/(1000) =0,5, d. h. +50 5

'ep =(50 %)/(-16,7 %) =-3; elastisch; d. h., eine Preissenkung um 1 % bewirkt eine Absatzsteigerung um 3 %

---

b.)

p\_N(x) =-0,001 \*x +4

---

c.)

4,00 € pro Tube;

4000 Tuben

---

d.)

'ep(x) =1 -(4000)/x

---

e.)

'ep(1000) =-3

---

f.)

2,00 € pro Tube;

2000 Tuben

---

g.)

E(x) =-0,001 \*x^2 +4 \*x;

E'(x) =-0,002 \*x +4;

0 =-0,002 \*x +4;

x\_E =2000

-----

+++5.017

a.)

3 GE/ME; 50 ME

---

b.)

20 ME

---

c.)

E\_(max) ~~27 GE

-----

+++5.018

a.)

2,4 GE/ME

---

b.)

2 GE/ME

-----

+++5.019

K\_1 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Graph nicht streng monoton steigend ist und Extrempunkte besitzt.

K\_2 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Kostenverlauf nur degressiv ist.

K\_3 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Kostenverlauf nur progressiv ist.

K\_4 ist nicht ertragsgesetzlich, da der Kostenverlauf zuerst progressiv, dann degressiv ist.

K\_5 ist ertragsgesetzlich, da die Kostenkurve streng monoton steigend und der Kostenverlauf zuerst degressiv, dann progressiv ist.

-----

+++5.020

a.)

(1) A

(2) E

---

b.)

(1) A

(2) D

-----

+++5.021

a.)

x\_(opt) =5 ME

p\_l =8 GE/ME

---

b.)

x\_(opt) =55 ME

p\_l =1005 GE/ME

-----

j-275

+++5.022

a.)

(1) x\_k =1 ME

(2) x\_(opt) =2 ME; p\_l =4 GE/ME

(3) x\_(min) =1,5 ME; p\_k =1,75 GE/ME

---

b.)

(1) x\_k =5 ME

(2) x\_(opt) =8,53 ME; p\_l =5,24 GE/ME

(3) x\_(min) =7,5 ME; p\_k =3,375 GE/ME

---

c.)

(1) x\_k =10 ME

(2) x\_(opt) =16,87 ME; p\_l =15 GE/ME

(3) x\_(min) =15 ME; p\_k =1,75 GE/ME

---

d.)

(1) x\_k =20 ME

(2) x\_(opt) =34,92 ME; p\_l =9,68 GE/ME

(3) x\_(min) =30 ME; p\_k =6 GE/ME

-----

+++5.023

a.)

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

K''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

K''(x) =0 --> 6 \*a \*x +2 \*b =0 <--> -b/(3 \*a)

---

b.)

Die Kostenkehre ist die Wendestelle der Kostenkurve. Wenn die Fixkosten steigen, wird die Kurve nach oben verschoben, die Wendestelle verändert sich nicht, die Kostenkehre bleibt gleich.

oder: Die Kostenkehre ist die Nullstelle der 2. Ableitung der Kostenfunktion.

Da die Fixkosten schon bei der 1. Ableitung wegfallen, beeinflussen diese die Kostenkehre nicht.

-----

+++5.024

a.)

Die Kostenzunahme beträgt 1,7 GE.

---

b.)

Mit der Rechnung wird die mittlere Kostenänderung bei einer Produktionserhöhung von 6 ME auf 6,2 ME berechnet, sie beträgt 1,764 ME/GE.

---

c.)

K'(6) =1,8 GE/ME; Bei einer Produktion von 6 ME beträgt der Kostenzuwachs für eine weitere ME ca. 1,8 GE.

---

d.)

Die Grenzkosten entsprechen der Tangentensteigung an der Stelle x =6.

Die mittlere Kostenänderung entspricht der Sekantensteigung zwischen x =6 und x =6,2.

-----

+++5.025

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

K(10) =350: Die Kosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 350 CE.

K'(10) =12: Die Grenzkosten betragen 12 GE/ME. Erhöht man die Produktion um eine ME, steigen die Kosten um ca. 12 GE.

K''(10) =-0,6: Die Kostenkurve verläuft bei x =10 degressiv (rechtsgekrümmt), deshalb gilt:

K(11) <K(10) +K'(10) -->K(11) <362

K(9) <K(10) -K'(10) -->K(9) <338

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

K(10) =1 250: Kosten bei einer Produktion von 10 ME: 1250 GE.

K'(10) =28: Grenzkosten: 28 GE/ME (Kostenzuwachs für eine weitere ME).

K''(10) =6: progressiver (linksgekrümmter) Kostenverlauf, deshalb gilt:

K(11) >K(10) +K'(10) -->K(11) >1278

K(9) >K(10) -K'(10) -->K(9) >1222

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

K(10) =150: Die Kosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 150 GE.

K'(10) =2: Die Grenzkosten betragen 2 GE/ME.

K''(10) =0 Die Kostenkehre liegt bei einer Produktion von 10 ME.

Kostenverlauf für x <10 degressiv, für x >10 progressiv, deshalb gilt:

K(11) >K(10) +K'(10) -->K(11) >152

K(9) <K(10) -K'(10) -->K(9) <148

-----

+++5.026

a.)

Die Kostenkehre ist die Produktionsmenge, bei der der degressive Kostenverlauf in den progressiven übergeht, die Stelle des Wendepunkts der Kostenfunktion; x\_k =4 ME.

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

b.)

Die Grenzkosten sind die Ableitung der Kostenfunktion, der ungefähre Kostenzuwachs für eine weitere ME; K'(8) ~~120 GE/ME

---

c.)

K^-(10) =(K(10)/(10) =(1050 GE)/(10 ME) =105 GE/ME

---

d.)

Das Betriebsoptimum ist die Produktionsmenge, bei der die Durchschnittskosten minimal sind;

x\_(opt) =7 ME. Die langfristige Preisuntergrenze ist der Preis, der den minimalen Durchschnittskosten entspricht; p\_l =90 GE/ME.

-----

+++5.027

a.)

Die Graphen haben folgende Eigenschaften:

K^- hat eine Pol bei x =0.

K\_v^- liegt unter K^- und ist asymptotische Grenzkurve von K, K\_v und K' schneiden einander bei x =0.

---

b.)

x\_k =4 ME;

x\_(min) =6 ME;

p\_k =60 GE/ME;

x\_(opt) =7 ME;

p\_l =90 GE/ME

-----

+++5.028

K(x) =0,1 \*x^2 +0,5 \*x +75

-----

+++5.029

K(x) =a \*x^2 +b \*x +F

K'(x) =2 \*a \*x +b

K^-(x) =a \*x +b +F/x

K^-'(x) =a -x.

1) K'(30) =0: a -F/(30^2)

2) K^-(30) =14: 30 \*a +b +F/(30) =14

3) K'(0) =0: b =8

K(x) =0,1 \*x^2 +8 \*x +90

-----

+++5.030

a.)

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +F

K'(x) =3 \*a \*x^2 +2 \*b \*x +c

K''(x) =6 \*a \*x +2 \*b

1) F =20

2) 60 \*a +2 \*b =0

3) 1000 \*a +100 \*b +10 \*c +F =50

4) 300 \*a +20 \*b +c =2

---

b.)

K(x) =0,01 \*x^3 -0,3 \*x^2 +5 \*x +20

-----

+++5.031

K(x) =1/(15) \*x^3 -36 \*x^2 +7600 \*x +360000

-----

+++5.032

a.)

Die Fixkosten betragen 16 GE. Die Grenzkosten bei Produktionsstillstand betragen 8 GE/ME. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 2 ME betragen 2 GE/ME.

Die Durchschnittskosten betragen dort 12 GE/ME.

---

b.)

K(x) =0,5 \*x^3 -3 \*x^2 +8 \*x +16

---

c.)

x\_(opt) =4 ME;

p\_l =8 GE/ME

---

d.)

x\_(min) =3 ME;

p\_k =3,5 GE/ME

---

e.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++5.033

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei einer Absatzmenge von 10 ME beträgt der Erlös 240 GE und der Grenzerlös -2 GE/ME. Bei Erhöhung der Absatzmenge um 1 ME sinkt der Erlös um ca. 2 GE.

Die Erlöskurve ist rechtsgekrümmt, deshalb gilt:

E(11) <E(10) +E'(10) -->E(11) <238

E(9) <E(10) -E'(10) -->E(9) <242

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei einer Absatzmenge von 10 Me beträgt der Gewinn 4 GE und der Grenzgewinn -2 GE/ME.

Bei Erhöhung der Absatzmenge um 1 ME sinkt der Gewinn um ca. 2 Ge.

Die Gewinnkurve ist rechtsgekrümmt, deshalb gilt:

G(11) <G(10) +G'(10) -->G(11) <2

G(9) <G(10) -G'(10) -->G(9) <6

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei einer Absatzmenge von 10 ME beträgt der Gewinn -10 GE (Verlust) und der Grenzgewinn 5 GE/ME.

Bei Erhöhung der Absatzmenge um 1 ME steigt der Gewinn um ca. 5 GE.

Die Gewinnkurve ist linksgekrümmt, deshalb gilt:

G(11) >G(10) +G'(10) -->G(11) <-5

G(9) >G(10) -G'(10) -->G(9) <-15

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Bei einer Absatzmenge von 10 ME ist der Erlös maximal mit 180 GE, da E'(10) =0 und E''(10) <0, deshalb gilt:

G(11) <G(10) +G'(10) -->G(11) <180

G(9) <G(10) -G'(10) -->G(9) <180

-----

+++5.024

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

a.)

G'(2) =1 GE/ME

---

b.)

G'(4) =0 GE/ME

---

c.)

G'(6) =-1 GE/ME

-----

+++5.035

a.)

G(x) =-x^2 +6 \*x -4;

x\_1 =0,764 ME;

x\_2 =5,236 ME;

G\_(max) =5 GE

---

b.)

G(x) =-0,3 \*x^2 +4,9 \*x -7,375;

x\_1 =1,677 ME;

x\_2 =14,656 ME;

G\_(max) =122,633

---

c.)

G(x) =-0,01 \*x^3 +0,45 \*x^2 +x -100;

x\_1 =17,273 ME;

x\_2 =41,633 ME;

G\_(max) =65,543 GE

---

d.)

G(x) =-1/6 \*x^3 +1,55 \*x^2 -3 \*x -2;

x\_1 =3,907 ME;

x\_2 =5,912 ME;

G\_(max) =0,917 GE

-----

+++5.036

a) und c)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

x\_1 =6 ME;

x\_2 =12 ME

---

d.)

G\_(max) =100 GE

-----

+++5.037

a.)

G(x) =-0,05 \*x^2 +0,55 \*x -1

---

b.)

G\_(max) =0,5125 GE bei x =5,5 ME

---

c.)

K'(5,5) =0,75 =p

---

d.)

G(x) =p \*x -K(x)

G'(x) =p -K'(x)

Für das Gewinnmaximum gilt: G'(x) =0, d. h. p =K'(x)

-----

j-278

+++5.038

a.)

{{Grafik: Funktionsgraphen nicht übertragen}}

---

b.)

x\_(opt) ~~17 ME;

p\_l ~~18 GE/ME;

p ~~27 GE/ME;

x\_1 ~~8 ME;

x\_2 ~~26 ME;

x\_g ~~18 ME;

G\_(max) ~~160 GE

K'(x\_g) ~~27 =p

-----

+++5.039

a.)

G(x) =-0,3 \*x^2 +6 \*x -10;

x\_1 =1,835 ME;

x\_2 =18,165 ME;

G\_(max) =20 GE;

C(10|6)

---

b.)

G(x) =-0,25 \*x^3 -4 \*x^2 +13 \*x -8;

x\_1 =0,805 ME;

x\_2 =3,361 ME;

G\_(max) =4 GE;

C(2|9)

---

c.)

G(x) =-0,25 \*x^3 -6 \*x^2 +21 \*x -10;

x\_1 =0,565 ME;

x\_2 =3,56 ME;

G\_(max) =10 GE;

C(2|16)

---

d.)

G(x) =-0,1 \*x^3 -0,5 \*x^2 +14 \*x -30;

x\_1 =2,468 ME;

x\_2 =7,907 ME;

G\_(max) =15,276 GE;

C(5,365|13,27)

-----

+++5.040

a.)

E(x) =-1/5 \*x^2 +3 \*x

D(x) =-1/(15) \*x^3 +3/5 \*x^2 -2/5 \*x

G(x) =-1/(15) \*x^3 +3/5 \*x^2 -2/5 \*x -2

---

b.)

E\_(max) =11,25 GE;

D\_(max) =4,87 GE;

G\_(max) =2,87 GE

---

c.)

Da G(x) =D(x) -F, gilt G'(x) =D'(x), d. h., G und D besitzen dieselben Extrema.

-----

+++5.041

a.)

p\_N(x) =-10 \*x +250

---

b.)

p(12,5) =125 GE/ME

---

c.)

K(x) =(10)/3 \*x^2 +50 \*x +480

---

d.)

x\_1 =3 ME;

x\_2 =12 ME

---

e.)

C(7,5|175)

-----

+++5.042

a.)

p\_N(x) =-0,25 \*x +10

---

b.)

x\_1 ~~2 ME;

x\_2 ~~28 ME

---

c.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

d.)

x\_(opt) =20 ME

---

+++5.043

a.)

p\_N(x) =-0,02 \*x +35

---

b.)

p =17,50 €;

x\_E =875 Stück

---

c.)

K(x) =5 \*x +4000;

G(x) =-0,02 \*x^2 +30 \*x -4000

---

d.)

G\_(max) =7250,00 €

---

e.)

p =20,00 €

-----

+++5.044

a.)

p(x) =0,002271 \*x^2 -0,33756 \*x +9,65495

Bei $ 9,65 wird niemand mehr das Taxi benutzen.

---

b.)

Bei x =17 Fahrten erhalten Sie den größten Umsatz mit $ 77,73. Der Fahrpreis für das Erlösmaximum beträgt $ 4,57.

---

c.)

K(x) =1,2 \*x +14

---

d.)

Der maximale Gewinn ergibt sich bei einem Preis von p\_g =$ 5,10 pro Fahrt und bei x =15 Fahrten pro Tag. G\_(max) beträgt $ 44,54.

Der maximal erreichbare Gewinn pro Monat beträgt somit $ 1113,44.

-----

j-279

+++Z 5.1

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

b.)

Der Marktpreis liegt bei 3,3 GE/ME

---

c.)

Die Lösung der Gleichung p\_A(x) =p\_N(x) ist die Gleichgewichtsmenge.

Setzt man diese in eine der beiden Funktionsgleichungen p\_A(x) oder p\_N(x) ein, erhält man den Marktpreis.

---

d.)

p\_N(x) =-0,55 \*x +5,5

---

e.)

Aus -0,55 \*x +5,5 =3,3 erhält man x =4 ME bei 3,3 GE/ME.

Aus -0,55 \*x +5,5 =2,2 erhält man x =6 ME bei 2,2 GE/ME.

('De p)/p =(-1,1)/(3,3) =-1/3; d. h. -33,3^. %

('De x)/x =2/4 =0,5; d. h. +50 %

'ep =(50 %)/(-33,3^. %) ~~-1,5; elastisch: Eine Preissenkung um 1 % bewirkt eine Absatzzunahme um 1,5 %.

---

f.)

'ep(x) =(x -10)/x

p\_N(x) =1,1 GE/ME für x =6 ME

'ep(6) =-0,6^. >-1; unelastisch: Eine Preissenkung um 1 % bewirkt eine Absatzzunahme von ca. 0,67 %.

---

g.)

Beim Preis mit der Elastizität gleich -1 wird der maximale Erlös erreicht.

-----

+++Z 5.2

a.)

richtig

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Die Preisfunktion der Nachfrage ist eine monoton fallende Funktion, deren Nullstelle mit der Nullstelle x =40 der Erlösfunktion übereinstimmt.

---

b.)

E'(30) =-36; d. h., bei Absatz einer weiteren ME sinkt der Erlös um ca. 36 GE.

---

c.)

x =5 und x =25

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

---

e.)

Der maximale Gewinn beträgt 200 GE.

-----

j-280

+++Z 5.3

a.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

Das Betriebsminimum ist 25 ME. Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt ca. 3,8 GE/ME.

---

b.)

K^-(x) =0,01 \*x^2 -0,5 \*x +10 +(100)/x

Lösen der Gleichung K^-'(x) =0 ergibt x\_(opt) ~~30,4 ME.

Langfristige Preisuntergrenze: K^-(x\_(opt)) ~~7,3 GE/ME

---

c.)

Das Betriebsoptimum ist jene Produktionsmenge, für die die Stückkosten minimal sind.

Produziert ein Betrieb das Betriebsoptimum und kann die gesamte Produktionsmenge zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze verkauft werden, erzielt der Betrieb weder einen Gewinn, noch macht er einen Verlust.

Das Betriebsminimum ist jene Produktionsmenge, für die die variablen Stückkosten minimal sind.

Produziert ein Betrieb das Betriebsminimum und kann die gesamte Produktionsmenge zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze verkauft werden, können die variablen Kosten gedeckt werden.

Der Betrieb macht einen Verlust in Höhe der Fixkosten.

-----

+++Z 5.4

a.)

K(x) =a \*x^3 +b \*x^2 +c \*x +d

Fixkosten: K(0) =200

Kostenkehre: K''(39) =0: 234 \*a +2 \*b =0

Grenzkosten: K'(70) =10: 14700 \*a +140 \*b +c =10

Stückkosten: K(10) =32: 100 \*a +10 \*b +c =32

---

b.)

K(x) =0,003279 \*x^3 -0,3836 \*x^2 +15,5082 \*x +200

-----

+++Z 5.5

X: Die Grenzkostenkurve und die Durchschnittskostenkurve schneiden einander im Betriebsoptimum.

: Die Grenzkostenkurve und die Durchschnittskostenkurve schneiden einander in der Kostenkehre.

X: Der Graph der variablen Kostenfunktion verläuft durch den Koordinatenursprung.

X: Die Grenzkostenkurve und die variable Durchschnittskostenfunktion schneiden einander im Betriebsminimum.

: Die Grenzkosten sind in der Kostenkehre am größten.

-----

+++Z 5.6

a.)

Die Fixkosten betragen 10.240 GE.

---

b.)

Kostenkehre bei 18 ME

Der Kostenverlauf ist bis x =18 ME degressiv und dann progressiv.

---

c.)

p\_N(x) =-39,87 \*x +4508,94

---

d.)

G(x) =p\_N(x) \*x -K(x) =-x^3 +14,13 \*x^2 +2454,94 \*x -10240

---

e.)

Lösen der Gleichung G'(x) =0 ergibt:

x ~~33,7 ME

p\_N(33,7) =3165,3 GE/ME

Cournotscher Punkt: (33,7|3165,3)

Maximaler Gewinn: G(33,7) ~~50266 GE

-----

j-281

+++Z 5.7

X: Bei vollständiger Konkurrenz ist die Erlösfunktion linear.

: An der Stelle des maximalen Gewinns sind die Grenzkosten und die Durchschnittskosten gleich groß.

X: Für die cournotsche Menge sind die Grenzkosten gleich groß wie der Grenzerlös.

: Die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion nehmen jeweils nur positive Funktionswerte an.

X: Die Gewinnzone liegt zwischen den Schnittstellen der Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion.

-----

## !!6 Integralrechnung

+++6.001

a.)

F(x) =C;

C 'el 'R

---

b.)

F(x) =2,5x

---

c.)

F(x) =0,25x^2

---

d.)

F(x) =0,5x^2 -x

---

e.)

F(x) =-0,5x^2 +0,5x

---

f.)

F(x) = F(x) =(x^3)/3

---

g.)

F(x) =(x^4)/4

---

h.)

F(x) ='e^x

---

i.)

F(x) =-'cos(x)

---

j.)

F(x) ='ln(|x|)

---

k.)

F(x) =(x^3)/3 +1,5x^2 +2x

---

l.)

F(x) =2x \*'w(x)

-----

+++6.002

a.)

F(x) =3x^3 -4x^2 +x +C

---

b.)

F(x) =3x^4 +8x^2 -16x +C

---

c.)

F(x) =1/5 x^5 +2/3 x^3 +x +C

---

d.)

F(x) =0,25x^4 -x^3 +1,5x^2 -x +C

---

e.)

F(x) =0,5x^2 -5x +'ln(|x|) +C

---

f.)

F(x) =x^3 +'sin(x) +C

-----

+++6.003

a.)

F(x) =x^2 +3x +C

---

b.)

F(x) =0,5x^3 +x^2 +15x +C

---

c.)

F(x) =-'sin(x) +C

---

d.)

F(x) =1/6 x^3 -1/2 x^2 +x -'ln(|x|) +C

---

e.)

F(x) =1/(x^4) +C

---

f.)

F(x) =1/2 x^2 -'ln(|x|) +1/x +C

---

g.)

F(x) =2 \*'w(x) +C

---

h.)

F(x) =3 \*'ln(|x|) +x -2 \*'w(x) +C

---

i.)

F(x) ='e^x -'cos(x) -x +C

-----

+++6.004

a.)

F(x) ='cos(x) +4x +C

---

b.)

F(x) ='e^x -13x +C

---

c.)

F(x) =x^5 -x +'cos(x) +C

---

d.)

F(x) =1/(x^2) +C

---

e.)

F(x) =2/3 \*x \*'w(x) +C

---

f.)

F(x) =2x \*'w(x) -6 \*'w(x) -x +C

-----

+++6.005

a.)

nein; ja; nein

---

b.)

ja; nein; ja

-----

+++6.006

a.)

F(x) =0,75x^4 -8

---

b.)

F(x) =2/3 x^3 -2,5x^2 +2x +(17)/6

---

c.)

F(x) =1/3 x^3 -2,5x^2 +3 \*'sin(x) +1

---

d.)

F(x) =2/3 x \*'w(x) -2x +4

-----

+++6.007

f(x) =(x^3)/6 -(x^2)/2 +x/3 +4

-----

+++6.008

a.)

p(x) =-3/2 x^2 -29x +3000

---

b.)

x\_S =26,09 ME

-----

+++6.009

a.)

K(x) =2x^3 -19x^2 +64x +4

---

b.)

19,71 GE/ME

-----

+++6.010

Untersumme:

{{Grafik: nicht übertragen}}

Obersumme:

{{Grafik: nicht übertragen}}

-----

+++6.011

a.)

20; 35

---

b.)

6,75; 10,75

---

c.)

0,16; 0,36

---

d.)

0,6456; 0,7456

-----

+++6.012

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: 0,2

Untersumme: 0,24

Obersumme: 0,44

Differenz: 0,2

Mittelwert: 0,34

---

n: 10

'De x: 0,1

Untersumme: 0,285

Obersumme: 0,385

Differenz: 0,1

Mittelwert: 0,335

---

n: 20

'De x: 0,05

Untersumme: 0,30875

Obersumme: 0,33835

Differenz: 0,05

Mittelwert: 0,0,33375

---

n: 100

'De x: 0,01

Untersumme: 0,32835

Obersumme: 0,33835

Differenz: 0,01

Mittelwert: 0,33335

---

b.)

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: 0,2

Untersumme: 0,64

Obersumme: 1,44

Differenz: 0,8

Mittelwert: 1,04

---

n: 10

'De x: 0,1

Untersumme: 0,81

Obersumme: 1,21

Differenz: 0,4

Mittelwert: 1,01

---

n: 20

'De x: 0,05

Untersumme: 0,9025

Obersumme: 1,1025

Differenz: 0,2

Mittelwert: 1,0025

---

n: 100

'De x: 0,01

Untersumme: 0,9801

Obersumme: 1,0201

Differenz: 0,04

Mittelwert: 1,0001

---

c.)

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: 0,2

Untersumme: 0,43078

Obersumme: 0,58078

Differenz: 0,15

Mittelwert: 0,50578

---

n: 10

'De x: 0,1

Untersumme: 0,46396

Obersumme: 0,53896

Differenz: 0,075

Mittelwert: 0,50146

---

n: 20

'De x: 0,05

Untersumme: 0,48161

Obersumme: 0,51911

Differenz: 0,0375

Mittelwert: 0,50036

---

n: 100

'De x: 0,01

Untersumme: 0,49626

Obersumme: 0,50376

Differenz: 0,0075

Mittelwert: 0,50001

---

d.)

{{Tabelle aufgelöst}}

n: 5

'De x: 0,6

Untersumme: 13,07786

Obersumme: 14,87768

Differenz: 1,80

Mittelwert: 13,97768

---

n: 10

'De x: 0,3

Untersumme: 13,54439

Obersumme: 14,44439

Differenz: 0,90

Mittelwert: 13,99439

---

n: 20

'De x: 0,15

Untersumme: 13,77359

Obersumme: 14,22359

Differenz: 0,45

Mittelwert: 13,99859

---

n: 100

'De x: 0,03

Untersumme: 13,95494

Obersumme: 14,04494

Differenz: 0,09

Mittelwert: 13,99994

-----

j-282

+++6.013

a.)

b -a

---

b.)

2 2/3

---

c.)

'e \*('e -q)

---

d.)

1

---

e.)

26

---

f.)

609

-----

+++6.014

a.)

21,57

---

b.)

5,16

---

c.)

307,16

---

d.)

5/(36)

-----

+++6.015

a.)

6; -14

---

b.)

-2; (14)/3

---

c.)

5

-----

+++6.016

a.)

A =8/3

---

b.)

A =7 2/3

---

c.)

A =(23)/(12)

---

d.)

A =1

---

e.)

A =9,5

---

f.)

A =1,5

---

g.)

A =0,5

---

h.)

A =1,3

-----

+++6.017

a.)

A =10 2/3

---

b.)

A =4/3

---

c.)

A =8

---

d.)

A =6,75

---

e.)

A =3 1/(12)

---

f.)

A =(253)/(192)

---

g.)

A =11 5/6

---

h.)

A =95 (11)/(15)

-----

+++6.018

D) ist richtig, weil vom Rechteck mit den Seitenlängen 2 \*a und b der Inhalt von der Fläche unterhalb des Graphen von f subtrahiert wird.

---

+++6.019

C ist richtig.

---

+++6.020

A =37 1/3

---

+++6.021

a.)

Max hat eine falsche untere Grenze gewählt.

---

b.)

Die richtige untere Grenze ergibt sich aus der Gleichung

4 =1/x; d. h. x =1/4

A =4 \*3,75 -'int[0,25; 4](1/x 'dx) ~~12,2274

-----

+++6.022

a.)

A =8/3

---

b.)

A =2/3

---

c.)

A =5 1/3

---

d.)

A =10 2/3

-----

+++6.023

a.)

b =4

---

b.)

b =4

---

c.)

b =6

---

d.)

b =('pi)/2

-----

+++6.024

a.)

A =2/3

---

b.)

A =18

---

c.)

A =10 2/3

---

d.)

A =1/3

-----

+++6.025

a.)

2 \*'int[0; a]((f(x) -g(x)) 'dx)

---

b.)

'int[0; x\_0]((h(x) -x) 'dx) ='int[0; a](h(x) 'dx -(x^2)/2

---

c.)

2 \*'int[0; x\_0]((g(x) -p(x)) 'dx)

---

d.)

'int[x\_1; x\_2]((g(x) -f(x)) 'dx) +'int[x\_2; x\_3]((f(x) -g(x)) 'dx)

-----

+++6.026

a.)

f(x) =2,8 -0,3 \*x^2

---

b.)

1 (kg)/(dm^3) =1000 g/(1000 cm^3) =1 g/(cm^3)

---

c.)

c. 371,52 kg

-----

+++6.028

15624 m^3

-----

+++6.029

a.)

h(x) =-0,35 \*x^2 +5,6

---

b.)

h(3) =-0,35 \*9 +5,6 =2,45

d.h., die Mindesthöhe 2,4 m ist gegeben.

---

c.)

3584 m^3

-----

+++6.030

ca. 13000 m^2

-----

+++6.031

K(x) ='int((0,03 \*x2 -0,8 \*x +8) 'dx) =0,01 \*x^3 -0,4 \*x^2 +8 \*x +C

K(10) =230: 230 =0,01 \*10^3 -0,4 \*10^2 +8 \*10 +C <--> C =180

Die Fixkosten betragen 180 GE.

K(x) =0,01 \*x^3 -0,4 \*x^2 +8 \*x +180

-----

j-283

+++6.032

a.)

E(x) ='int((-0,2 \*x +6) 'dx) =-0,1 \*x^2 +6 \*x +C

Da E(0) =0, ist C =0.

---

b.)

E'(40) =-2 GE/ME;

d. h., wird eine weitere ME abgesetzt, dann sinkt der Erlös um 2 GE.

---

c.)

Maximaler Erlös: E'(x) =0: 0 =-0,2 \*x +6 <--> x =30 ME

E\_(max) =E(30) =90 GE

-----

+++6.033

a.)

Lineare Grenzkostenfunktion:

Achsenabschnitt d =5;

Steigung k =0,5

K'(x) =0,5 \*x +5

---

b.)

K(x) ='int((0,5 \*x +5) 'dx) =0,25 \*x^2 +5 \*x +C;

F =C =25

K(x) =0,25 \*x^2 +5 \*x +25

---

c.)

Stückkostenfunktion:

K^-(x) =0,25 \*x +5 +(25)/x;

K^-'(x) =0,25 -(25)/(x^2)

Betriebsoptimum:

K^-'(x) =0: 0 =0,25 -(25)/(x^2) --> x =+-10;

x\_(opt) =10 ME

---

d.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++6.034

a.)

Lineare Grenzgewinnfunktion:

Achsenabschnitt d =4;

Steigung k =-0,1;

G'(x) =-0,1 \*x +4

---

b.)

Die Nullstelle x =40 der Grenzgewinnfunktion ist die Stelle des maximalen Gewinns.

---

c.)

G(x) ='int((-0,1 \*x +4) 'dx) =-0,05 \*x^2 +4 \*x +C

maximaler Gewinn: G(40) =45

45 =-0,05 \*40^2 +4 \*40 +C --> C =-35

G(x) =-0,05 \*x^2 +4 \*x -35

---

d.)

G(0) =E(0) -K(0) =-F, d. h. F =35

-----

+++6.035

a.)

PV ='int[0; 10](2 \*'e^(-'ln(1,08) \*t) 'dt)

---

b.)

PV =13,950084 Mio. Euro

---

c.)

Die Obersumme entspricht dem Barwert der zugehörigen endlichen vorschüssigen Rente, die Untersumme entspricht dem Barwert der zugehörigen endlichen nachschüssigen Rente.

---

d.)

B\_(vor) =2 \*1,08 \*(1 -1,08^(-10))/(0,08) =14,493776 Mio. Euro;

B\_(nach) =2 \*(1 -1,08^(-10))/(0,08 =13,420163 Mio. Euro;

-----

+++6.036

a.)

Der zu i\_(12) =0,5 % äquivalente stetige Zinssatz beträgt 0,49875 %.

---

b.)

PV ='int[0; 24](10000 \*'e^(-'ln(1,005) \*t) 'dt) =226192,26

Der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms beträgt 226192,26 Euro.

-----

+++6.037

a.)

Der Wert 1,05127 ist der Zuwachsfaktor, um den die Einnahmen jährlich steigen.

Die Einnahmen steigen jährlich um 5,127 %.

---

b.)

PV ='int[0; 10](80000 \*'e^(0,05 \*t) \*'e^(-0,08 \*t) 'dt) ='int[0; 10](80000 \*'e^(-0,03 \*t) 'dt) =691151,41

Der Barwert des kontinuierlichen Zahlungsstroms beträgt 691151,41 Euro.

-----

+++6.038

a.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

180 m

c.)

s(30) ='int[0; 30](6 'dt) =[6 \*t]\_[0; 30] =180

---

d.)

s(t) =6 \*t

-----

+++6.039

s(t) ='int((g \*t) 'dt) =g/2 \*t^2 +s\_0

-----

j-284

+++6.040

a.)

v =20 m/s;

v =72 km/h;

t =5 s;

a =-4 m/(s^2)

---

b.)

v(t) =-4 \*t +20

---

c.)

s(5) ='int[0; 5]((20 -4 \*t) 'dt) =[20 \*t -2 \*t^2]\_[0; 5] =50;

d. h., der zurückgelegte Weg beträgt 50 m.

---

d.)

Das bestimmte Integral beschreibt den zurückgelegten Weg 18 m in der ersten Sekunde des Bremsvorgangs.

---

e.)

s(t) =20 \*t -2 \*t^2

-----

+++6.041

a.)

t\_R =1 s;

t\_B =5 s;

t\_A =6 s

---

b.)

a\_B =-6 m/(s^2);

negatives Vorzeichen bedeutet Abbremsung

---

c.)

Der Anhalteweg entspricht der Maßzahl des Flächeninhaltes unter der Kurve im v-t-Diagramm vom Beginn des Anhaltevorganges 0 s bis zum Zeitpunkt des Stillstandes des Fahrzeuges t\_A.

---

d.)

30 für t <1

v(t) ={[30 für t <1] [-6 \*t +36; 1 <=t <=6]

---

e.)

Reaktionsweg

s\_R ='int[0; t\_R](v(t) 'dt) ='int[0; 1](30 'dt) =[30 \*t]\_[0; 1] =30 m

Bremsweg

s\_B ='int[t\_R; T\_A](v(t) 'dt) ='int[1; 6]((-6 \*t +36) 'dt) =[-3 \*t^2 +36 \*t]\_[1; 6] =75 m

Anhalteweg

s\_A ='int[0; t\_A](v(t) 'dt =s\_R +s\_B =105 m

---

f.)

{{Grafik: Reaktionsweg, Bremsweg, Anhalteweg nicht übertragen}}

-----

+++6.042

a.)

In den ersten 10 Sekunden befindet sich der Springer im freien Fall.

Nach 10 Sekunden hat der Springer aufgrund des Luftwiderstands die maximale Geschwindigkeit von ca. 53 m/s erreicht. Nach ca. 50 Sekunden wird die Reißleine gezogen, der Fallschirm öffnet sich, der Springer wird auf eine Geschwindigkeit von ca. 8 m/s gebremst.

Mit dieser Geschwindigkeit sinkt der Springer im Zeitintervall [55; 125] zu Boden.

Nach ca. 125 Sekunden landet er.

---

b.)

a =('De v)/('De t) =(7 -53)/(55 -50) =-46)/5 =-9,2

Die Bremsbeschleunigung beträgt ca. -9 m/(s^2).

---

c.)

Der Fallschirmspringer ist bei geöffnetem Fallschirm 490 m gesunken.

---

d.)

Das bestimmte Integral beschreibt den zurückgelegten Weg 300 m in den ersten 10 Sekunden des freien Falls.

---

e.)

{{Grafik: ca. 3000 m; nicht übertragen}}

Die gesamte Fallhöhe entspricht der Maßzahl des Inhalts der Fläche unter der Geschwindigkeitskurve. Die Fläche kann durch zwei Rechtecke angenähert werden.

-----

+++6.043

a.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

W(t\_0) ='int[0; t\_0](240 'dt) =[240 \*t]\_[0; t\_0] =240 \*t\_0

W =240 \*120 =28800

L =28,8 m^3

-----

j-285

+++6.044

a.)

a =1/(60)

---

b.)

W(t\_0) ='int[0; t\_0]((240 -4 \*t +1/(60) \*t^2) 'dt) =[240 \*t -2 \*t^2 +1/(180) \*t^3]\_[0; t\_0] =240 \*t\_0 -2 \*t\_0^2 +1/(180) \*t\_0^3

W(120) =9600 L =9,6 m^3

-----

+++6.045

a.)

Positive Funktionswerte in [0; 60] bedeuten einen Zufluss, die negativen in [60; 120] einen Abfluss. Aufgrund der Symmetrie ist die zugeflossene Wassermenge gleich der abgeflossenen, nach 2 h ist die Wassermenge gleich wie am Anfang.

Die Wassermenge ist maximal zum Zeitpunkt t =60, danach fließt das Wasser wieder ab.

---

b.)

{{Grafik: Funktionsgraph nicht übertragen}}

-----

+++6.046

a.)

Zufluss in [0; 2];

Abfluss in [2; 6]

---

b.)

Bei t =2 und t =6 fließt kein Wasser zu oder ab.

---

c.)

Die Wassermenge im Staubecken entspricht der Fläche zwischen der Zuflusskurve und der Zeit-Achse.

Die positive Fläche ist wesentlich größer als die negative Fläche.

---

d.)

Zum Zeitpunkt t =2 ist die Wassermenge maximal, da bis zu diesem Zeitpunkt Wasser zufließt und danach wieder abfließt.

---

e.)

-53,33; Das Integral entspricht der im Zeitintervall [2; 6] abgeflossenen Wassermenge 53,33 m^3.

---

f.)

'int[0; 6]((5 \*t^2 -40 \*t +60) 'dt) =[5/3 \*t^3 -20 \*t^2 +60 \*t]\_[0; 6] =0

Die Wassermenge beträgt wie am Anfang 100 m^3.

-----

+++6.047

a.)

f(t) =a \*t^2 +b \*t +c

1) f(0) =9: 9 =c

2) f(2) =4: 4 =4 \*a +2 \*b +9

3) f(4) =1: 1 =16 \*a +4 \*b +9

a =0,25; b =-3;

f(t) =0,25 \*t^2 -3 \*t +9

---

b.)

'int[0; 6]((0,25 \*t^2 -3 \*t +9) 'dt) =[1/(12) \*t^3 -2/3 \*t^2 +9 \*t]\_[0; 6] =18;

18g ausgestoßene Schadstoffmenge

-----

+++Z 6.1

a.)

f(x) =2 \*x +1;

F(x) =x^2 +x;

f'(x) =2

---

b.)

f(x) =3 \*x^2 +x;

f'(x) =x^3 +(x^2)/2 -1;

F(x) =1/4 \*x^4 +(x^3)/6 -x

---

c.)

f'(x) ='e^(3 \*x);

f(x) =3 \*'e^(3 \*x);

F(x) =1/3 \*'e^(3 \*x +1)

-----

+++Z 6.2

f(x) ='w(x) mit Stammfunktion C) F(x) =2/3 \*'w(x^3)

f(x) =1/('w(x) mit Stammfunktion B) F(x) =2 \*'w(x)

-----

+++Z 6.3

a.)

A ='int[1; 2](f(x) 'dx) ='int[1; 2]((x^2 -2 \*x +2) 'dx)

A =[(x^3)/3 -x^2 +2 \*x]\_[1; 2] =8/3 -(1/3 -1 +2) =4/3

---

b.)

A ='int[-0,5; 1,5](f(x) 'dx) ='int[-0,5; 1,5]((x^3 +1) 'dx)

A =[(x^4)/4 +x]\_[-0,5; 1,5] =((1,5^4)/4 +1,5) -(((-0,5)^4)/5 -0,5) ~~3,25

-----

+++Z 6.4

2 \*['int[a; b]((f(x) -g(x)) 'dx) +'int[0; a]((g(x) -f(x)) 'dx)]

Es wird die Symmetrie der Funktionen genutzt und zwischen x =0 und x =b integriert. Die erhaltene Fläche wird dann verdoppelt.

Im Intervall [0; a] entspricht das Integral über g -f dem Flächeninhalt,

im Intervall [a; b] entspricht das Integral über f -g dem Flächeninhalt.

j-286

+++Z 6.5

a.)

Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist die Maximumstelle der Erlösfunktion.

---

b.)

Der Inhalt der Fläche beträgt (8 \*20)/2 =80 GE.

---

c.)

Der Flächeninhalt entspricht dem Erlös bei einer Absatzmenge von 20 ME, also dem maximalen Erlös.

---

d.)

E'(x) =-2/5 \*x +8

---

e.)

E(x) ='int(E'(x) 'dx) =-1 \*x^2 +8 \*x +c

---

f.)

Die Konstante c muss gleich null sein, da E(0) =0 ist.

-----

+++Z 6.6

a.)

Die Beschleunigung ist zum Zeitpunkt des Starts am größten und nimmt gleichmäßig ab.

Zum Zeitpunkt 16 Sekunden ist sie gleich null. Anschließend beginnt der Bremsvorgang.

Die Beschleunigung wird negativ.

---

b.)

Scheitel (16|16); v(t) =a \*(t -16)^2 +16

v(0) =0; 0 =a \*16^2 +16 damit a =-1/(16)

v(t) =-1/(16) \*(t -16)^2 +16 =-1/(16) \*t^2 +2 \*t

---

c.)

s(32) ='int[0; 32](v(t) 'dt) =[-1/848) \*t^3 +t^2]\_[0; 32] =341,3^3 m

Das Fahrzeug legt während der Testfahrt ca. 341,3 m zurück.

---

d.)

s(t) ='int(v(t) 'dt) =-1/(48) \*t^3 +t^2

-----

+++Z 6.7

a.)

'int[0; 2](v(t) 'dt) =[1/(12) \*t^3 -3/2 \*t^2 +9 \*t]\_[0; 2] =12,6^.

---

b.)

In den ersten 2 Jahren werden ca. 12,7 m^3 Schadstoffe ausgestoßen.

---

c.)

Schadstoffmenge im ersten Jahr:

'int[0; 1](v(t) 'dt) =[1/(12) \*t^3 -3/2 \*t^2 +9 \*t]\_[0; 1] =7,583^.

(7,583^.)/9 ~~0,84

Die abgegebene Schadstoffmenge wurde im ersten Jahr um ca. 16 % gesenkt.

-----

## !!7 Beschreibende Statistik

+++7.001

a.)

Die Augenzahl beim Würfeln mit einem gewöhnlichen Spielwürfel.

diskret, weil abzählbar

Grundgesamtheit: alle Würfe

Merkmalwertevorrat: {1; 2; 3; 4; 5; 6}

---

b.)

Die Länge eines Birkenblattes.

stetig, Messwert

Grundgesamtheit: z.B. alle Blätter eines Baumes

Merkmalwertevorrat: z.B. [0,5; 14]

---

c.)

Der Typ von Autos auf dem Schulparkplatz.

diskret, Nominalskala

Grundgesamtheit: alle Autotypen

Merkmalwertevorrat: Kombi, Limousine, Cabrio, Kleinwagen, ...

---

d.)

Die Körpergröße der Schüler/innen Ihrer Klasse.

stetig, Messwert

Grundgesamtheit: Körpergrößen aller Schüler/innen

Merkmalwertevorrat: z.B. [150; 190]

---

e.)

Die Schuhgröße der Schüler/innen Ihrer Klasse.

diskret, weil abzählbar

Grundgesamtheit: Schuhgrößen aller Schüler/innen

Merkmalwertevorrat: z.B. {36; 36 1/2; 37; ...; 47}

---

f.)

Die Zahl der Fehlstunden der Schüler/innen Ihrer Klasse im ersten Halbjahr.

diskret, weil abzählbar

Grundgesamtheit: Menge 'N

Merkmalwertevorrat: z.B. {0; 1; ...; 150}

-----

+++7.002

exemplarisch:

a.)

Spitzensportler

Merkmal: Sportart; diskret

Merkmalwertevorrat: Tennis, Ski-alpin, Schwimmen, ...

Merkmal: Masse (Gewicht); stetig

Merkmalwertevorrat: [30 kg; 130 kg]

Merkmal: Größe; stetig

Merkmalwertevorrat: [110 cm; 225 cm]

Merkmal: Bewerbe; diskret

Merkmalwertevorrat: Landes-/Staatsmeisterschaften, internationale Wettbewerbe

Merkmal: Bestleistungen; diskret oder stetig

Merkmalwertevorrat: Je nach Sportart verschieden ...

---

c.)

Musiker

Merkmal: Vorname; diskret

Merkmalwertevorrat: ...

Merkmal: Nachname; diskret

Merkmalwertevorrat: ...

Merkmal: Instrument; diskret

Merkmalwertevorrat: Blas-, Streichinstrumente ...

---

e.)

Auto

Merkmal: Marke; diskret

Merkmalwertevorrat: VW, Audi, Renault, Nissan, Toyota, Mercedes, BMW ...

Merkmal: Leistung; Von Natur aus stetig, aber diskret angegeben.

Merkmalwertevorrat: [30 kW; 500 kW]

Merkmal: Preis; wie Leistung

Merkmalwertevorrat: ...

-----

j-287

+++7.003

Geschlecht: nominal

Temperatur in Celsius: metrisch

Körpergewicht: metrisch

Haarfarbe: nominal

Nettoeinkommen: metrisch

Haus-Nr. in einer Straße: ordinal

Temperatur in Kelvin: metrisch

Zufriedenheit mit Hotel: ordinal

Autonummer: nominal

Wohnort der Mitschüler: nominal

-----

+++7.004

Schulnoten sind ordinalskaliert.

-----

+++7.005

individuelle Lösung

---

+++7.006

Frage 1:

Geschlecht

{{Grafik: Kreisdiagramm: Geschlecht: 125 männlich; 179 weiblich}}

---

Frage 2:

{{Grafik: Histogramm: Alter:

[0; 20[: 51

[20; 40[: 124

[40; 60[: 95

[60; 80[: 34}}

---

Frage 3:

{{Grafik: Wohnbezirk nicht übertragen}}

---

Frage 4:

{{Grafik: Histogramm: Familiennettoeinkommen:

[0; 2000[: 126

[2000; 4000[: 148

[4000; 6000[: 30}}

-----

+++7.007

a.)

8 Personen surfen mehr als 30 Minuten im Internet.

---

b.)

15 Personen surfen bis zu (inkl.) 40 Minuten im Internet.

---

c.)

{{Tabelle aufgelöst}}

[0; 10[

x\_i: 5

f\_i: 3

---

[10; 20[

x\_i: 15

f\_i: 3

---

[20; 30[

x\_i: 25

f\_i: 6

---

[30; 40[

x\_i: 35

f\_i: 3

---

[40; 50[

x\_i: 45

f\_i: 2

---

[50; 60[

x\_i: 55

f\_i: 3

---

d.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

e.)

k =5;

'De x =12

-----

+++7.008

{{Grafik: Verkehrsunfälle

Überholen: 50

Vorfahrt: 30

Abbiegen: 50

Geschwindigkeit: 60

Sonstiges: 20}}

---

{{Grafik: Verkehrsunfälle}}

-----

+++7.009

a.)

In Diagramm 1 wird die Gewinnentwicklung als Liniendiagramm dargestellt, die vertikale Achse stellt das Gewinnintervall [0; 70] dar.

In Diagramm 2 wird die Gewinnentwicklung nur für das Gewinnintervall [50; 70] dargestellt.

In Diagramm 3 wird die prozentuelle Änderung des Gewinns jeweils gegenüber dem Vorjahr dargestellt,

z. B. für 2011: (55 -52)/(52) ~~5,8 %;

für 2012: (60 -55)/(55) ~~9,1 %

usw.

---

b.)

Diagramm 1 erzeugt den Eindruck, dass der Gewinn schwach gestiegen ist.

Diagramm 2 erzeugt den Eindruck, dass der Gewinn stark gestiegen ist.

Diagramm 3 erzeugt den Eindruck, dass der Gewinn abnimmt.

---

c.)

Keines der drei Diagramme stellt die Gewinnentwicklung falsch dar, aber mit den Diagrammen 2 und 3 wird eine Absicht verfolgt: Das Unternehmen wird Diagramm 2 wählen, um die Gewinnentwicklung positiv darzustellen, die Konkurrenz wird Diagramm 3 wählen, um die Gewinnentwicklung negativ darzustellen.

Nur Diagramm 1 stellt die Gewinnentwicklung neutral dar.

-----

+++7.010

{{Tabelle aufgelöst}}

x\_i: 0

h\_i: 0,23

---

x\_i: 1

h\_i: 0,50

---

x\_i: 2

h\_i: 0,21

---

x\_i: 3

h\_i: 0,06

-----

j-288

+++7.011

a.)

x^- =2062,50 €

---

b.)

Das arithmetische Mittel ist wegen des Ausreißers 3200,00 € nicht typisch.

---

c.)

der Median

---

d.)

Der Median von 1725,00 € liegt deutlich unter dem arithmetischen Mittel, weil er vom Ausreißer 3200,00 € nicht beeinflusst wird.

-----

+++7.012

Klasse 4a

a.)

Modus =3;

Median =3;

arithmetisches Mittel =3,22

---

b.)

h\_1 =11 %;

h\_2 =17 %;

h\_3 =39 %;

h\_4 =6 % und

h\_5 =28 %

Diskussionsaufgabe: Beachten Sie, dass die Berechnung des arithmetischen Mittels problematisch ist, da Schulnoten nicht metrisch, sondern nur ordinal skaliert sind.

-----

+++7.013

Dem Zeitungsartikel können wir entnehmen: Gemeint ist der Median.

-----

+++7.014

a.)

2,199...

---

b.)

Da die Urliste nicht gegeben ist, haben Sie für das arithmetische Mittel mit "5 und mehr Personen" als 5-Personen-Haushalte gerechnet. Haushalte mit 6, 7, ... Personen werden als 5-Personen-Haushalte gerechnet. Dadurch wird die durchschnittliche Haushaltsgröße unterschätzt.

-----

+++7.015

a.)

1,45 \*2,1 \*1,3 \*1,4 ~~5,54; d. h. ca. 454 % Umsatzsteigerung

---

b.)

'w[4](1,45 \*2,1 \*1,3 \*1,4) ~~1,534; d. h. ca. 53,4 % jährliche Umsatzsteigerung

-----

+++7.016

a.)

Der Geschäftsführer rechnet mit dem arithmetischen Mittel:

(25 % +0 % -30 % +5 %)/4 =0 %

---

b.)

1,25 \*1 \*0,7 \*1,05 =0,91875; d. h. -8,125 %

---

c.)

x\_g^- ='w[4](1,25 \*1 \*0,7 \*1,05) ~~0,979; d. h. -2,1 %

-----

+++7.017

a.)

1,25 ist der Zuwachsfaktor des Kurses im ersten Jahr, dieser entspricht einer Rendite von 25 %.

0,8 ist der Abnahmefaktor des Kurses im zweiten Jahr, dieser entspricht einer Rendite von -20 %.

---

b.)

Der Investor hat das arithmetische Mittel der Jahresrenditen berechnet. Das Ergebnis +2,5 % ist offensichtlich unsinnig, da der Kurs nach 2 Jahren mit dem Kurs am Anfang übereinstimmt.

---

c.)

Geometrisches Mittel der Änderungsfaktoren:

x\_g^- ='w(1,25 \*0,8) =1; d. h. Rendite 0 %

-----

+++7.018

a.)

Die Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, da sie sich auf verschiedene Grundwerte beziehen.

---

b.)

1,2 \*1,1 =1,32; d. h. 32 % Umsatzsteigerung

Bei prozentuellen Änderungen muss das geometrische Mittel der Zuwachsfaktoren verwendet werden.

---

c.)

x\_g^- ='w(1,2 \*1,1) =1,1489; d. h. 14,89 % durchschnittliche jährliche Gewinnsteigerung

-----

+++7.019

a.)

Der Quotient besagt, dass der Pkw-Bestand von 1990 bis 2005 um 39 % gestiegen ist.

---

b.)

'w[15]((4156743)/(2991284)) -1 ~~2,2 %

---

c.)

'w[10]((4748048)/(4156743)) -1 ~~1,34 %

-----

+++7.020

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

x\_i: 0

f\_i: 2

---

x\_i: 1

f\_i: 5

---

x\_i: 2

f\_i: 2

---

x\_i: 3

f\_i: 0

---

x\_i: 4

f\_i: 1

---

b.)

1,3;

1,21;

1,1

-----

+++7.021

a.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

b.)

1,5;

1,25;

1,118

-----

j-289

+++7.022

1,1;

0,67;

0,82

------

+++7.023

a.)

{{Tabelle aufgelöst}}

x\_i: 1

h\_i: 0,68

---

x\_i: 2

h\_i: 0,24

---

x\_i: 3

h\_i: 0,08

---

b.)

1,4;

0,4;

0,6325

-----

+++7.024

a.)

Mittelwert erhöht sich um 5, Standardabweichung bleibt unverändert.

---

b.)

Mittelwert und Standardabweichung verdoppeln sich.

---

c.)

Mittelwert und Standardabweichung verringern sich um 20 %.

-----

+++7.025

600;

223,6

-----

+++7.026

8;

4

-----

+++7.027

a.)

Modi: 7 und 9;

Median =9;

arithmetisches Mittel =10,5

---

b.)

Die 27 CDs der Anna dominieren den Mittelwert und "verfälschen" so das Bild. Der Median ist gegen die 27 CDs unempfindlich.

---

c.)

x\_(min) =3;

Q\_1 =7;

Median Q\_2 =9;

Q\_3 =11;

x\_(max) =27

-----

+++7.028

x\_(min) =5

Q\_1 =7

Median Q\_2 =17

Q\_3 =21

x\_(max) =75

{{Grafik: Boxplot nicht übertragen}}

Mindestens 25 % der Betriebe haben 5 bis höchstens 7 Angestellte.

Mindestens 25 % der Betriebe haben 7 bis höchstens 17 Angestellte.

-----

+++7.029

x\_(min) =10

Q\_1 =12

Median Q\_2 =12

Q\_3 =14

x\_(max) =17

{{Grafik: Boxplot nicht übertragen}}

-----

+++7.030

Modus: existiert nicht;

Median =17;

x^- =20,3

Jeder Betrieb hat durchschnittlich 20,3 Beschäftigte.

x\_(min) =5

Q\_1 =7

Median Q\_2 =17

Q\_3 =21

x\_(max) =75

{{Grafik: Boxplot nicht übertragen}}

-----

+++7.031

a.)

Minimum: 0;

Q\_1 =1,

Median: 3;

Q\_3 =4;

Maximum: 7;

Spannweite: 7

---

b.)

Der Quartilsabstand ist die Differenz aus oberem und unterem Quartil Q\_3 -Q\_1.

Q\_3 -Q\_1 =4 -1 =3

-----

+++7.032

a.)

x^- =27,67 Punkte

---

b.)

Minimalwert =x\_(min) =0;

unteres Quartil Q\_1 =20;

Median Q\_2 =29,5;

oberes Quartil Q\_3 =36;

Maximalwert =x =48

{{Grafik: Boxplot nicht übertragen}}

---

c.)

Nimmt man laut Notenschlüssel

x\_1 =1 ="Sehr gut",

x\_2 =2 ="Gut" usw.,

erhält man die Durchschnittsnote x^- =3,58.

Der Median ist 4.

0 bis 24 Punkte: Nicht genügend

x\_i: 5

f\_i: 7

x\_i \*f\_i: 35

25 bis 31 Punkte: Genügend

x\_i: 4

f\_i: 7

x\_i \*f\_i: 28

32 bis 37 Punkte: Befriedigend

x\_i: 3

f\_i: 5

x\_i \*f\_i: 15

38 bis 44 Punkte: Gut

x\_i: 2

f\_i: 3

x\_i \*f\_i: 6

45 bis 48 Punkte: Sehr gut

x\_i: 1

f\_i: 2

x\_i \*f\_i: 2

{{Grafik: Diagramm nicht übertragen}}

Schulnoten sind ordinalskaliert. Die "klassische" Berechnung des Notendurchschnitts mit dem arithmetischen Mittel ist nicht zulässig. Der Median ist hier das bessere Zentralmaß.

-----

j-290

+++7.033

a.)

Die Schüler der Klasse verschickten am Vortag zwischen 0 und 8 SMS, die Schülerinnen zwischen 1 und 9 SMS.

---

b.)

Die Spannweite einer Datenreihe ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert.

Die Spannweite beträgt jeweils 8 (8 -0 bzw. 9 -1).

---

c.)

Q\_1 der Schülerinnen liegt bei 2 SMS.

Das untere (erste) Quartil Q\_1 ist der Wert mit der Eigenschaft, dass mindestens 25 % der Daten kleiner oder gleich diesem Wert sind.

-----

+++7.034

a.)

Die Aussage ist richtig. Der Median liegt bei 3. Der Median teilt die Datenwerte in zwei Hälften.

---

b.)

Q\_3 -Q\_1 =4 -1 =3

---

c.)

{{Grafik: Boxplot nicht übertragen}}

---

d.)

1; 2; 2; 3 | 3; 3; 5; 8

Median: 3

x =3,375 Durch den Ausreißer 8 ist das arithmetische Mittel größer als der Median.

-----

+++7.035

a.)

In der Klasse 2B sind alle fünf Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung besser als in den beiden Parallelklassen:

Minimum: 50;

Q\_1 =53;

Median: 61;

Q\_3 =70;

Maximum: 85

---

b.)

Quartilabstand Q\_3 -Q\_1:

Klasse A: 65 -50 =15

Klasse B: 70 -53 =17

Klasse C: 53 -28 =25

-----

+++7.036

a.)

100 % -(7 % +19 % +41 %) =100 % -67 % =33 %.

Die Top-5 % halten rund 33 % am gesamten Bruttovermögen.

---

b.)

Anteile und kumulierte Anteile:

{{Tabelle aufgelöst}}

Anteil der Haushalte: Untere Hälfte (0,5)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,5

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,07

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,07

---

Anteil der Haushalte: Obere Mitte (0,3)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,8

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,19

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,26

---

Anteil der Haushalte: Vermögende (0,15)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 0,95

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,41

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,67

---

Anteil der Haushalte: Top-5 % (0,05)

Kumulierter Anteil der Haushalte: 1,0

Anteil am gesamten Bruttovermögen: 0,33

Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen: 1,00

---

c.)

{{Grafik: Kumulierter Anteil am gesamten Bruttovermögen; Kumulierter Anteil der Haushalte}}

---

d.)

Der vierte Punkt der Lorenzkurve (0,95|0,67) sagt, dass 95 % der Haushalte zusammen rund 67 % des gesamten Bruttovermögens halten.

-----

j-291

+++7.037

a.)

geordnete Urliste:

15; 17; 27; 35; 106

---

b.) und c.)

{{Grafik: Lösung mit Technologie nicht übertragen}}

---

d.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

+++7.038

a.)

geordnete Urliste:

50; 50; 50; 50; 50; 50; 90; 90; 90; 100; 100; 100; 100; 110; 120

---

b.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

---

c.)

Die Steigung der Lorenzkurve ist in den einzelnen Intervallen (Bereichen) konstant und nimmt beständig zu.

---

d.)

{{Grafik: nicht übertragen}}

G =2 \*A =0,1722

-----

+++7.039

Für eine Gleichverteilung gilt: x\_i =x

G =(2 \*'Si[i =1; n](i \*x\_i))/(n \*'Si[i =1; n](x\_i)) -(n +1)/n =(n +1)/n -(n +1)/n =0

-----

+++7.040

{{Grafik: nicht übertragen}}

Die Fläche A ist 1/2 -1/2 \*1/n \*1 =1/2 \*(1 -1/n) =(n -1)/(2 \*n).

Und da der Gini-Koeffizient G das Doppelte der Fläche A ist, gilt G =2 \*A =(n -1)/n.

-----

+++7.041

a.) und b.)

G =2 \*A =0,7

{{Grafik: nicht übertragen}}

-----

+++7.042

a.)

Im ersten Land besitzt die ärmere Hälfte der Bevölkerung 1o Prozent (ein Zehntel) des Grundbesitzes. Im zweiten Land besitzen die reichsten 1o Prozent der Bevölkerung die Hälfte des Grundbesitzes.

---

b.)

Erstes Land: 1; 9

Zweites Land: (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; (50)/9; 50

---

c.)

Die Gini-Koeffizienten sind für beide Länder mit 0,4 ident.

{{Grafik: nicht übertragen}}

-----

j-292

+++Z 7.1

a.)

(130)/(130 +240 +85 +145) =0,216^. ~~22 %

Die Aussage stimmt.

---

b.)

{{Grafik: Säulendiagramm nicht übertragen}}

---

c.)

{{Grafik: Kreisdiagramm

Zu Fuß: 21,67 %

Bus: 40,00 %

Privater PKW: 14,17 %

Zug: 24,17 %}}

-----

+++Z 7.2

a.)

Arithmetisches Mittel: 42,5 Monate

n -1-gewichtete Standardabweichung: 8,36 Monate

---

b.)

Bei der ursprünglichen Produktionsmethode ist das arithmetische Mittel geringer.

Allerdings streut das Messergebnis weniger stark.

Ca. 68 % aller gemessenen Bauteile haben eine Lebenserwartung,

die zwischen 42,5 -8,36 =34,14 Monaten und 42,5 +8,36 =50,86 Monaten liegt.

Die Lebenserwartung der auf neue Weise hergestellten und untersuchten Bauteile liegt zu 68 % zwischen 44,7 -11,7 =33 Monaten und 44,7 +11,7 =56,4 Monaten.

Man kann nicht eindeutig sagen, dass die auf die neue Art produzierten Bauteile länger halten.

-----

+++Z 7.3

a.)

Herr Trager hat das arithmetische Mittel der Prozentsätze gebildet.

Für den Mittelwert von Prozentsätzen muss aber das geometrische Mittel verwendet werden.

---

b.)

(1 -0,31) \*(1 -0,36) \*(1 -0,44) =0,2473

Um ca. 75,27 % gesenkt.

---

c.)

1 -'w[3](0,69 \*0,64 \*0,56)

-----

+++Z 7.4

a.)

1. Quartil: ca. 25 Minuten,

Median: ca. 51 Minuten,

3. Quartil: 90 Minuten

---

b.)

: 50 % aller Schüler/innen telefonieren weniger als 50 Minuten.

: Genau ein/e Schüler/in telefoniert täglich nicht mehr als 10 Minuten.

X: Mindestens 75 % aller Schüler/innen telefonieren täglich mindestens 25 Minuten.

X: Mindestens 50 % aller Schüler/innen telefonieren mindestens 25 aber höchstens 90 Minuten täglich.

: 25 % aller Schüler/innen telefonieren höchstens 51 Minuten täglich.

X: Die Schüler/innen telefonieren höchstens 120 Minuten täglich.

-----

j-293

# !!Quellennachweis

Seite 3: Fotolia: Young high school students (#5131585). © Yuri Arcurs.

Seite 7: Augustin Louis Cauchy (Wikimedia Commons).

Seite 14: Fotolia: Autos, Mopeds, Taxen und Busse warten am Zebrastreifen (#15251287). © Jörg Hackemann. Seite 14: Medicent Innsbruck Garage (www.apcoa.at).

Seite 15: Graph einer stetigen Funktion (Quelle unbekannt).

Seite 22: Gottfried Wilhelm Leibniz (Wikipedia: www.hfac.uh.edu/gbrown/philosophers, gemeinfrei).

Seite 22: Isaac Newton (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 25: Kartenausschnitt Burgenland (Quelle unbekannt).

Seite 26: Temperaturkurve November (Quelle unbekannt).

Seite 27: Kaffee und Temperaturmessung. © Fritz Tinhof.

Seite 28: Grafik: Aspirin-Konzentration im Blut (Quelle unbekannt).

Seite 48: Shutterstock: Group of runners runs the Vienna City Marathon (#423179905). © Zdenek Krchak. Seite 50: Shutterstock: Close up of pregnant woman ... (#232623784). © Iryna Prokofieva.

Seite 51: Discours de la méthode (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 52: Motorrad (www.clker.com).

Seite 65: Shutterstock: view of the Ruhr region (...) in Bottrop (#80074033). © Jule\_Berlin.

Seite 65: Shutterstock: Cartoon character of shot putter throwing iron ball (#278135306). © Ho Yeow Hui.

Seite 66: Shutterstock: Field fertilization work fertilizer (#418022662). © Meryll.

Seite 71: Wasserstrahl eines Brunnens (Quelle unbekannt).

Seite 72: Mathe macchiato Analysis, Buchcover (www.amazon.de).

Seite 72: Skizze Bahnsteig (aus: Mathe macchiato Analysis, Pearson Verlag 2010).

Seite 74: Fotolia: Bergisel Tower in Innsbruck (#59056632). © Anibal Trejo.

Seite 74: Skizze Aufsprungbahn der Berg-Isel-Sprungschanze (Uni Graz).

Seite 76: Freier Fall (Quelle unbekannt).

Seite 77: Auffahrunfall (www.landespolizei.li).

Seite 78: Fotolia: tennis player hitting the ball (#61810780). © luckybusiness.

Seite 80: Unglaubliche Beschleunigung (www.cardor.de).

Seite 81: Kid runs into moving car (#91080233). © Alias Ching.

Seite 83: Fotolia: Group of cyclists (#65186831). © Senohrabek.

Seite 84: Schiefer Turm von Pisa (Quelle unbekannt).

Seite 85: Fotolia: Bungeejumping (#9992329). © Krzysztof Walkow.

Seite 86: Fotolia: Germany compact executive car (#61410885). © Gennady Poddubny.

Seite 88: Fotolia: Grippe Prävention Impfung Grippewelle (#49058098). © Trueffelpix.

Seite 104: Thomas Malthus (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 106: Harry Bateman (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 107: Medikamentenabbau (Quelle unbekannt).

Seite 108: Fotolia: Sunflower on a meadow in the light of the setting sun (#17477297). © joda.

Seite 115: Campbell's soup can (jssgallery.org).

Seite 129: Shutterstock: hand throwing up a coin to make decision (#462745717). © Denphumi.

Seite 130: Fotolia: Kleines Bauernhaus im Mühlviertel (#21421241). © Dieter Hawlan.

Seite 130: Fotolia: drinks production plant in China (#60493729). © 06photo.

Seite 131: Fotolia: Business charts and graphs (#40460287). © Sergey Nivens.

Seite 131: Fotolia: Globale Wirtschaft (#31147493). © Thomas.

Seite 135: Thorstein Veblen (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 135: Shutterstock: Friendly woman tending an organic vegetable stall ... (#413506042). © AYAphoto.

Seite 149: Jacques Turgot (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 152: Shutterstock: A stack of delicious wheat round biscuits ... (#268617146). © Prasert Wongchindawest.

Seite 156: Terrasse Gartengestaltung. © Markus Paul.

Seite 165: Antoine Augustin Cournot (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 170: Firmengebäude Trauner. © Trauner Verlag.

Seite 170: Pretty Woman in Taxi (#4162760). © Stephen Coburn.

j-294

Seite 173: Johannes Kepler (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 173: Bernhard Riemann (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 179: Fotolia: Antarctica Political Map (#84029433). © Peter Hermes Furian.

Seite 191: Hoftor (Quelle unbekannt).

Seite 194: Tennishalle (Quelle unbekannt).

Seite 194: Mathe macchiato Analysis, Buchcover (www.amazon.de).

Seite 198: Shutterstock: Brewers testing beer at brewery (#452734891). © wavebreakmedia.

Seite 198: Shutterstock: Attractive hiker with big traveling rucksack (#206076439). © GaudiLab. Anhalteweg bei 30 und 50 km/h (www.krone.at)

Seite 207: Francesco Sansovino: Sammlung von Staatsbeschreibungen (covers.openlibrary.org).

Seite 207: Adolphe Quételet (www.matematycy.interklasa.pl).

Seite 218: Logo Statistik Austria (www.statistik.at).

Seite 224: Johann Wolfgang von Goethe (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 224: Zeitungsartikel "Tirol bei Löhnen hinten" (Tiroler Tageszeitung: 1. 9. 2009).

Seite 225: Fotolia: Kabel (#80270543). © blickpixel.

Seite 225: Fotolia: Autobahn (#1739647). © WernerHilpert.

Seite 230: Fotolia: Zahnarzt (#23560119). © Christoph Hähnel.

Seite 230: Logo Statistik Austria (www.statistik.at).

Seite 232: John Wilder Tukey (www.morris.umn.edu).

Seite 233: Shutterstock: Increasing male body shapes... (#137572436). © stihii.

Seite 235: Fotolia: Handies (#64582088). © gpointstudio.

Seite 237: Max Otto Lorenz (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 237: Corrado Gini (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 233: Shutterstock: education, school and technology concept -smiling students ... (#242847625). © Syda Productions.

Seite 242: Shutterstock: Cityscape with train, people and bus stop, public transportation. (#318859421).© natsusora.

Seite 243: Shutterstock: A large paper mill located on the Amelia River in Fernandina Beach. (#163064702).© Dawna Moore.

Seite 243: Shutterstock: Diverse People Digital Devices Wireless Communication Concept (#227854612).© Rawpixel.com.

Screenshots von Tabellen, Graphen und Auswertungen wurden mithilfe von am Markt bekannten Tabellenkalkulationsprogrammen, CAS und GTR erstellt.

Alle übrigen Grafiken und Fotos sind Eigentum des TRAUNER Verlags.

j-295

# !!Stichwortverzeichnis

A

Ableitung 29

-, erste 33, 34

-, Exponentialfunktion 94

-, Funktion 33

-, Grundfunktionen 38

-, konstante Funktion 38

-, Logarithmusfunktion 95

-, Potenzfunktion 39

-, Winkelfunktionen 96

-, zweite 43

Ableitungen, höhere 43

Ableitungsfunktion 30, 31

Ableitungsregeln 92, 100

absolute Extrema 59

absolute Häufigkeit 214

absoluter Hochpunkt 59

absoluter Tiefpunkt 59

absolutes Extremum 59

achsensymmetrisch 18

Analysis 51

Änderungsrate, lokale 29, 30

-, mittlere 24

Angebot, Preisfunktion 133

Angebotsfunktion 132, 133

Angebotsmonopol 138

Angebotsüberhang 136

Anhalteweg 82, 86, 203

arithmetisches Mittel 219

Asymptote 13, 17

Auffangbecken 201

Ausgleichsgerade 123

äußere Funktion 98

B

Bakterienwachstum 104

Balkendiagramm 215

Bateman-Funktion 106

Bedingung, hinreichende 61

-, notwendige 60

Berechnungsformel 115

Beschleunigung 80

-, mittlere 80

beschreibende Statistik 207

bestimmtes Integral 182

Bestimmtheitsmaß 124

Betriebsminimum 153, 154, 155

Betriebsoptimum 152, 153

beurteilende Statistik 208

Bevölkerungsentwicklung 105

Bewegung 199

Bewegungen, gleichförmige 77

Bewegungsaufgaben 75 bimodal 222

Bogenelastizität, Nachfrage 140

Boxplot-Diagramm 232

Break-even-Point 162

Bremsweg 82, 203

C

cournotsche Menge 165

cournotscher Preis 165

cournotscher Punkt 165

D

Daten, metrische 215

-, qualitative 215

Datenpaare 121

Datenreihe 214

Deckungsbeitrag 161

degressiv 89

Diagrammtypen 215

Differenzenquotient 24, 34

Differenzial 22

Differenzialquotient 29, 34

Differenzialrechnung, Hauptsatz 185

Differenzierbarkeit, Funktion 34

Differenzieren 33, 175

diskretes Merkmal 210

durchschnittlichen Kosten 7

Durchschnittsgeschwindigkeit 75

Durchschnittskosten 152

E

elastische Nachfrage 142

Erlös 138, 161

Erlösfunktion 138

erste Ableitung 33, 34

Ertragsgesetz 149

ertragsgesetzliche Kostenfunktion 148, 149, 157

Exponentialfunktion, Ableitung 94

Exponentialfunktionen, Integrale 177

exponentielle Regression 128

Extrema 52, 59

-, absolute 59

-, relative 113

Extrempunkt 59

Extremstelle 59

Extremstellen 21

Extremum 60

-, absolutes 59

-, relatives 59

Extremwert 59

F

Faktor, konstanter 40

Faktorregel 39, 177

Fehler 122

Fehlerquadrate, kleinste 122

Fixkosten 148

Fläche zwischen 2 Kurven 190

Flächeninhalt, orientierter 188

Flächeninhaltsfunktion 184

Flächeninhaltsproblem 179

Fluxionsrechnung 21

freier Fall 200

Fünf-Punkte-Zusammenfassung 232

Funktion, Ableitung 33

-, äußere 98

j-296

-, Differenzierbarkeit 34

-, ganzrationale 16

-, gebrochenrationale 16

-, gerade 18, 19

-, Grenzwert 9

-, innere 98

-, konstante 16

-, lineare 16

-, Steigung 33

-, stetig 14

-, Stetigkeit 34

-, ungerade 18, 19

Funktionsdiskussion 62

Funktionswert 51

G

ganzrationale Funktion 16

gebrochenrationale Funktion 16

geometrisches Mittel 223

gerade Funktion 18, 19

Gesamtkosten 148, 161

Gesamtkosten 7

Gesamtkostenfunktion 148

Gesamtkostenkurve 153

Geschwindigkeit 75

-, mittlere 23, 75

Gewinn 161

-, Monopol 165

-, vollständige Konkurrenz 163, 164

Gewinngrenzen 162

Gewinnmaximum 163

Gewinnzone 162

Giffen-Paradoxon 135

Gini-Koeffizient 239

gleichförmige Bewegungen 77

Gleichgewichtspreis 135

Gleichung, Tangente 32

Grenzerlösfunktion 139, 144, 195

Grenzfunktion 139

Grenzgewinn 161

Grenzgewinnfunktion 161

Grenzgewinnkurve 161

Grenzkosten 154

Grenzkostenfunktion 154, 195

Grenzkostenkurve 154

Grenzwert 9, 10

-, Funktion 9

Grenzwertsätze 12

Grundfunktionen, Ableitung 38

Grundgesamtheit 209

Grundintegrale 176

H

Häufigkeit, absolute 214

Häufigkeit, relative 214

Häufigkeitstabelle 213, 214

Häufigkeitsverteilungen 213

Hauptsatz, Differenzialrechnung 185

-, Integralrechnung 185

hebbare Lücke 16

hinreichende Bedingung 61

Histogramm 215

Hochpunkt, absoluter 59

Höchstpreis 134, 137

höhere Ableitungen 43

I

innere Funktion 98

Integral, bestimmtes 182

-, unbestimmtes 175

Integrale, Exponentialfunktionen 177

-, trigonometrische Funktionen 177

Integralfunktion 184

Integralrechnung, Hauptsatz 185

Integrand 182, 184

Integrationsgrenzen 182

Integrationsvariable 182

Integrierbarkeit 182

Integrieren 174, 175

Intervall, Stetigkeit 15

Intervallskala 211

K

Kettenregel 98, 99

Klasseneinteilung 216

kleinste Fehlerquadrate 122

Kompetenzmodell, Standardmatrix 5

Konkurrenz, vollständige 137, 138

konstante Funktion 16

--, Ableitung 38

konstanter Faktor 40

konstanter Summand 40

kontinuierliche Zahlungsströme 196

Konzentration 107

Korrelation 124

Korrelationskoeffizient 124

korreliert, schwach 124

-, stark 124

-, vollkommen 124

Kosten, durchschnittliche 7

-, variable 148

Kostenfunktion, ertragsgesetzliche 148, 149, 157

-, lineare 148

-, neoklassische 148

-, Regression 158

Kostenkehre 150, 155

Kostenrechnung 148

Kreisdiagramm 215

Krümmungsverhalten 51, 52, 54

kubische Regression 128

Kurvendiskussion 62

kurzfristige Preisuntergrenze 153, 154

L

langfristige Preisuntergrenze 152, 153

Leck 201

lineare Funktion 16

lineare Kostenfunktion 148

lineare Regression 127

linearer Zusammenhang 124

Liniendiagramm 215

linksgekrümmt 54, 55

j-297

Logarithmusfunktion, Ableitung 95

lokale Änderungsrate 29, 30

Lorenzkurve 237

Lösungsweg, Optimierungsaufgaben 115

lotrechter Wurf 79, 85

Lücke 9, 10, 15

-, hebbare 16

M

Marginalanalyse 131

Marktformen 137, 138

Marktpreis 132, 135, 136

Maximum 61

-, relatives 61

Median 221

Medikamentenabbau 106, 107

Menge, cournotsche 165

Merkmal 210

-, diskretes 210

-, metrisches 212

-, qualitatives 212

-, stetiges 210

Merkmalausprägung 210

Merkmalträger 210

Merkmalwert 210

Merkmalwertevorrat 210

metrische Daten 215

metrisches Merkmal 212

Mindestpreis 136

Minimum 61

-, relatives 61

Mitläufer-Effekt 135

Mittel, arithmetisches 219

-, geometrisches 223

Mittelwerte 219

mittlere Änderungsrate 24

mittlere Beschleunigung 80

mittlere Geschwindigkeit 23, 75

Modalwert 222

Modellparameter 122

Modus 222

Momentanbeschleunigung 80

Momentangeschwindigkeit 23

Momentangeschwindigkeit 77

Monopol 137, 138

-, Gewinn 165

monoton fallend 53

monoton steigend 53

Monotonie 52, 53

Monotonieverhalten 53

N

Nachfrage 132, 134

-, Bogenelastizität 140

-, elastische 142

-, Preiselastizität 140

-, Preisfunktion 134

-, Punktelastizität 142, 143

-, unelastische 141

Nachfragefunktion 134

Nachfrageüberhang 137

Nebenbedingung 113, 115

negative Orientierung 188

neoklassische Kostenfunkton 148

Nominalskala 211

Normalgleichungen 123

notwendige Bedingung 60

Nullstelle 17

Nullstellensatz 17

O

Obersumme 180, 182

Optimierung 112

Optimierungsaufgaben, Lösungsweg 115

Ordinalskala 211

orientierter Flächeninhalt 188, 189

Orientierung, negative 188

-, positive 188

P

Pearson, Korrelationskoeffizient 124

Polstelle 8, 9, 10, 17

Polynomfunktion 16

Polypol 137

positive Orientierung 188

Potenzfunktion, Ableitung 39

Potenzregel 39, 92, 176

Preis, cournotscher 165

Preiselastizität, Nachfrage 140

Preisfunktion, Angebot 133

-, Nachfrage 134

Preissteigerung 140

Preisuntergrenze, kurzfristige 153, 154

-, langfristige 152, 153

Produktregel 96

Punkt, cournotscher 165

Punktelastizität, Nachfrage 142, 143

Punktewolke 121

punktsymmetrisch 18

Q

quadratische Regression 128

qualitative Daten 215

qualitatives Merkmal 212

Quartilsabstand 231

Quartile 231

Quotientenregel 97

R

Randextrema 61

Reaktionsweg 82, 203

rechtsgekrümmt 54, 55

Regression, exponentielle 128

-, Kostenfunktion 158

-, kubische 128

-, lineare 127

-, quadratische 128

Regressionsgerade 121, 123

Regressionsrechnung 121

relative Extrema 113

relative Häufigkeit 214

relatives Extremum 59

j-298

relatives Maximum 61

relatives Minimum 61

repräsentativ 209

Residuen 122

Riemann-Integral 182

S

Sättigungsmenge 134

Säulendiagramm 215

schwach korreliert 124

Sekante, Steigung 24

Snob-Effekt 135

Spannweite 226

Sprungstelle 14

Stabdiagramm 215

Stammfunktion 174

Standardabweichung 228

Standardmatrix, Kompetenzmodell 5

stark korreliert 124

Statistik 208

-, beschreibende 207

-, beurteilende 208

Steigung 51

-, Funktion 33

-, Sekante 24

-, Tangente 29, 33

stetig 14, 15

stetige Funktion 14

stetiges Merkmal 210

Stetigkeit 15

-, Funktion 34

-, grafisch 15

-, Intervall 15

Stichprobe 209

Stichprobenumfang 209

Streudiagramm 121

Streuungsmaße 226

Stückkosten 152

Summand, konstanter 40

Summenhäufigkeit 214

Summenregel 39, 177

Symmetrie 18

T

Tangente 32

-, Gleichung 32

-, Steigung 29, 33

Tangentenproblem 21

Terrassenpunkt 60, 61

Tiefpunkt, absoluter 59

Tortendarstellung 215

Trendlinie 123

trigonometrische Funktionen, Integrale 177

U

unbestimmtes Integral 175

unelastische Nachfrage 141

ungerade Funktion 18, 19

unkorreliert 124

unstetig 14, 15

Untersumme 180, 182

Urliste 214

V

variable Kosten 148

Varianz 227

Veblen-Effekt 135

Verhältnisskala 211

Verteilung, zweidimensionale 121

vollkommen korreliert 124

vollständige Konkurrenz 137, 138

--, Gewinn 163, 164

Volumenstrom 201

Weg, zurückgelegter 199

Wendepunkt 57, 58, 61

Wendestelle 57

Wendetangente 57, 58

Wertepaare 122

Winkelfunktionen, Ableitung 96

Wirtschaftsmathematik 131

Wurf, lotrechter 79, 85

Z

Zahlungsströme, kontinuierliche 196

Zeitreihe 215

Zentralmaße 222

Zielfunktion 114, 115

zurückgelegter Weg 199

Zusammenhang, linearer 124

zweidimensionale Verteilung 121

zweite Ableitung 43

j-299

t.

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik

Erklärungen

Aufgaben

Lösungen

Formeln

---

Die Bände dieser Mathematikreihe sind für den Unterricht an kaufmännischen

höheren Schulen erstellt. Besonderes Augenmerk wird auf die Kompetenzorientierung gelegt. Die Bücher bieten eine optimale Vorbereitung auf die standardisierte Reife- und Diplomprüfung.

Bei sämtlichen vollständig durchgerechneten Beispielen und Übungsaufgaben werden die vier Handlungskompetenzen berücksichtigt:

Z ... Für Downloads aus dem digitalen Zusatzpaket

A ... Modellieren und Transferieren

B ... Operieren und Technologieeinsatz

C ... Interpretieren und Dokumentieren

D ... Argumentieren und Kommunizieren

Bildung, die begeistert!

---

DIGI 4 SCHOOL

www.digi4school.at

E-Book und digitales Zusatzpaket einzulösen unter

www.digi4school.at

---

ISBN 978-3-99033-845-2

SBNr. 180.703

ISBN 978-3-99033-976-3

SBNr. Kombi E-Book 180.880

www.trauner.at